◇２０２４年度東京医科大学

1

(1)　5 進法で表された循環小数 $x=4.\dot{3}\dot{2}_{(5)}$ を 10 進法の分数で表すと、$x=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=3}^{15}\frac{1}{{}_nC_3}=\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(3)　i を虚数単位とし、偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考える。$\alpha=\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$、

$\beta=5+5i$ のとき、$\alpha\beta$ の偏角は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}\pi$ であり、$(\alpha\beta)^{2024}$ の偏角は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ である。

(4)　$f(x)=xe^x\ (x>0)$ の逆関数を $g(x)$ とする。$a=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ とすれば、

$g(a)=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$、$g'(a)=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ である。

解説

(1)　$x=4+\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}+\dfrac{2}{5^4}+\cdots\cdots$　　　……①

①×5^2 より

$5^2\cdot x=4\cdot5^2+3\cdot5+2+\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}+\dfrac{2}{5^4}+\cdots\cdots$　　　……②

②−① より

$$\begin{array}{rl} 5^2\cdot x=4\cdot5^2+3\cdot5+2 & +\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}+\dfrac{2}{5^4}+\cdots\cdots \\ -)\quad x=4 & +\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}+\dfrac{2}{5^4}+\cdots\cdots \\ \hline 24x=4\cdot5^2+3\cdot5+2-4 & \end{array}$$

$\therefore\quad x=\dfrac{113}{24}$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{15}\frac{1}{{}_nC_3}&=\sum_{n=3}^{15}\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\\ &=3\sum_{n=3}^{15}\left\{\frac{1}{(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-1)n}\right\}\\ &=3\left\{\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{13\cdot14}-\frac{1}{14\cdot15}\right)\right\}\\ &=3\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{14\cdot15}\right)\\ &=\frac{52}{35}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\alpha&=\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i\\ &=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\\ &=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta&=5+5i\\ &=5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

よって、
$$\begin{aligned}arg(\alpha\beta)&=arg\alpha+arg\beta\\ &=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

また、
$$\begin{aligned}arg(\alpha\beta)^{2024}&=2024\cdot arg(\alpha\beta)\\ &=2024\times\frac{\pi}{12}\\ &=168\pi+\frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

よって$(\alpha\beta)^{2024}$ の偏角は $\dfrac{2}{3}\pi$

(4)　$f(x)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ のとき、$xe^x=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ より、$x=\dfrac{1}{2}$

これより、$y=g(x)$ は、$\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}、\dfrac{1}{2}\right)=\left(a、\dfrac{1}{2}\right)$ を通るので、$g(a)=\dfrac{1}{2}$

また、
$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{f'(y)}\\ &=\frac{1}{e^y+ye^y}\\ &=\frac{1}{e^y(y+1)}\end{aligned}$$

よって、
$$\begin{aligned}g'(a)&=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\\ &=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

参考　$y=f(x)$ の逆関数より、$x=f(y)$

両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy}=f'(y)$$

よって、$y=f(x)$ の逆関数の微分は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

となる。

2 半径 1 の円に内接する正三十六角形 K の頂点を P_0、P_1、……、P_{35} とする。この 36 個の頂点から 4 つの頂点を選び、それらを結んで四角形を作る。

(1) 正方形は全部で $\boxed{ア}$ 個できる。また、その正方形の面積は $\boxed{イ}$ である。

(2) 長方形の個数は $\boxed{ウエオ}$ である。

(3) 正三十六角形 K とちょうど 2 辺を共有する四角形は、全部で $\boxed{カキクケ}$ 個できる。

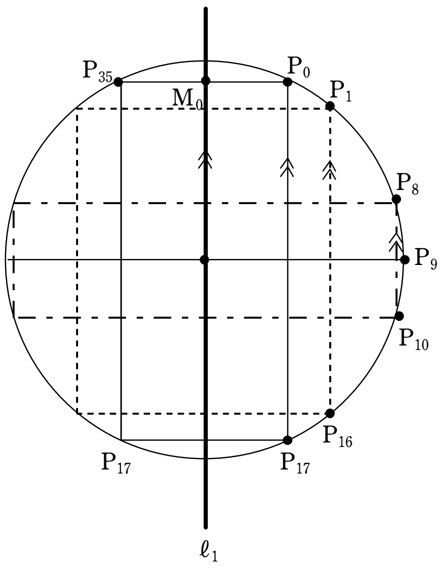
解説

(1) 正方形を 1 つ決めるとき、頂点と頂点の間にある点の個数は

$$(36-4)\times\frac{1}{4}=8$$

よって、正方形は $8+1=9$ 個 できる。
正方形の対角線の長さが 2 より、一辺の長さは$\sqrt{2}$ となるので
面積は、$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

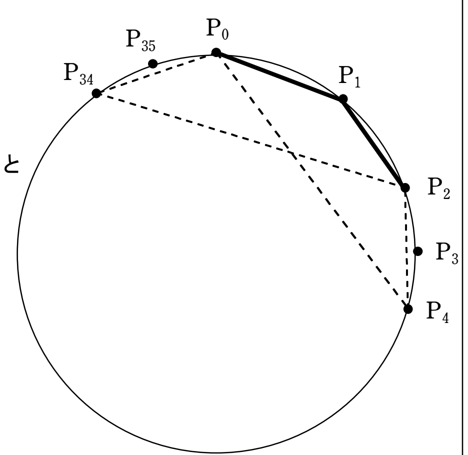
(2) 線分$P_{35}P_0$ の中点を M_0、線分 P_0P_1 の中点を M_1、…… M_{17} とおき、M_0 と円の中心を結ぶ直線を ℓ_0、M_1 と円の中心を結ぶ直線を ℓ_1、…… ℓ_{17} とすると
ℓ_1 に対して、左右対称に正三十六角形 K の頂点が 18 個ずつあり、ℓ_1 の右側で ℓ_1 に平行な直線上の 2 頂点を決めれば、対称性より長方形は唯 1 つに決まる。
このとき、 ℓ_1 に平行な直線上に 2 頂点が存在しない場合も考慮して、長方形の個数は 9 個となる。ℓ_2、…… ℓ_{17} のときも同様にして、$9\times17=153$個



(3)

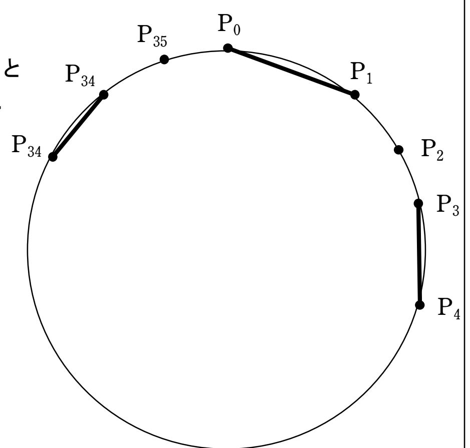
(ｉ) 2 辺が隣り合うとき
例えば $P_0P_1P_2$ を四角形の隣り合う 2 辺とするとき、残りの頂点はP_4 ～ P_{34} から 1 つ選べばよい。このとき、条件を満たす四角形は 31 個作られる。
$P_1P_2P_3$、$P_2P_3P_4$、……、$P_{33}P_{34}P_{35}$ のときも同様にして 31 個作られるので

$$31\times36=1116 \text{ 個}$$



(ⅱ) 2 辺が隣り合うないとき
例えば P_0P_1 を四角形の辺の一部とすると残りの辺の選び方は、P_3P_4、 P_4P_5、……、$P_{33}P_{34}$ の 31 通りとなる。
四角形の辺の一部をP_3P_4、 P_4P_5、……、$P_{33}P_{34}$ とするときも同様にして 31 通りである。ただし、 1 個の四角形は 2 回数えているので

$$31\times36\times\frac{1}{2}=558 \text{ 個}$$



(ｉ)、(ⅱ)より、$1116+558=1674$ 個

3 O(0、0、0) を原点とする座標空間において、A(8、8、7) を中心とする球面 S_1 と B(4、2、1) を中心とする球面 S_2 があり、半径はともに r である。球面 S_1 は平面 α : $2x+2y+z=3$ と点 H で接している。S_1 と S_2 の共通部分は円であり、中心を Q、半径を r' とする。

(1) 平面 α の法線ベクトルで z 成分が 1 のものを $\vec{n}$ とすれば

$\vec{n}=\left(\boxed{\text{ア}}、\boxed{\text{イ}}、1\right)$ である。

(2) $r=\boxed{\text{ウエ}}$ であり、H の座標は $\left(\boxed{\text{オ}}、\boxed{\text{カ}}、\boxed{\text{キ}}\right)$ である。

(3) $r'=\sqrt{\boxed{\text{クケコ}}}$ であり、Q の座標は $\left(\boxed{\text{サ}}、\boxed{\text{シ}}、\boxed{\text{ス}}\right)$ である。

(4) 三角形 OHQ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

解説

(1) 平面 α : $2x+2y+z=3$ の法線ベクトルで z 成分が 1 のものは

$$\vec{n}=(2、2、1)$$

参考 平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線ベクトルの 1 つは、$(a、b、c)$ である。

(2) 点 A を通り、$\vec{n}$ に平行な直線と平面 α との交点が H より

直線のベクトル方程式は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+2t\\8+2t\\7+t\end{pmatrix}\quad(t\text{ は実数})$$

これと平面 α との交点は

$$2(8+2t)+2(8+2t)+(7+t)=3$$

$\therefore\ 9t=-36$

$\therefore\ t=-4$

よって、H(0、0、3)

また、$r=\mathrm{AH}$

$=\sqrt{8^2+8^2+(7-3)^2}$

$=12$

別解 点 A から平面 α までの距離が r より

$$r=\frac{|2\cdot8+2\cdot8+7-3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=12$$

また、点 A は $2x+2y+z\geqq3$ の領域にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-12\times\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$=\begin{pmatrix}8\\8\\7\end{pmatrix}-12\times\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\times\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

よって、H(0、0、3)

(3) S_1 と S_2 の半径が等しいので、Q は A、B の中点となる。

よって、$\mathrm{Q}\left(\dfrac{8+4}{2}、\dfrac{8+2}{2}、\dfrac{7+1}{2}\right)=(6、5、4)$

また、$r'=\sqrt{12^2-\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{144-\dfrac{(8-4)^2+(8-2)^2+(7-1)^2}{4}}$

$=\sqrt{144-22}$

$=\sqrt{122}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=9、|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=6^2+5^2+4^2=77、\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}=12$$

よって、求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{9\cdot77-12^2}$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{61}$

4 $\boxed{\text{ス}}$、$\boxed{\text{セ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものをそれぞれ１つずつ選べ。

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とし、曲線 $y=f(x)$ を C とする。ただし、a、b、c、d は実数の定数である。C は x 軸と $x=-2$、1 において接している。C と x 軸によって囲まれた部分を D とする。

(1)　$a=\boxed{\text{ア}}$、$b=\boxed{\text{イウ}}$、$c=\boxed{\text{エオ}}$、$d=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^7dx=\frac{\boxed{\text{キクケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(3)　正の整数 p、q に対し、

$$\int_{-2}^{1}(x+2)^{p+1}(x-1)^q dx=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\int_{-2}^{1}(x+2)^p(x-1)^{q+1}dx$$

が成り立つ。

(4)　D を x 軸の周りに１回転して得られる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ソタチツ}}}{\boxed{\text{テト}}}\pi$ である。

【$\boxed{\text{ス}}$】解答群

⓪ $p+1$　① $p+2$　② q　③ $q+1$　④ 1
⑤ $-(p+1)$　⑥ $-(p+2)$　⑦ $-q$　⑧ $-(q+1)$　⑨ -1

【$\boxed{\text{セ}}$】解答群

⓪ p　① $p+1$　② $p+2$　③ $2p+1$　④ $2p$
⑤ q　⑥ $q+1$　⑦ $q+2$　⑧ $2q+1$　⑨ $2q$

解説

(1)　$f(x)$ は x 軸と $x=-2$、1 において接しているので、$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ より

$$f(x)=(x+2)^2(x-1)^2$$

となる。よって、展開してまとめると

$$f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$$

となるので、$a=2$、$b=-3$、$c=-4$、$d=4$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^7dx&=\int_{-2}^{1}(x+2)\left\{\frac{1}{8}(x-1)^8\right\}'dx\\&=\left[\frac{1}{8}(x+2)(x-1)^8\right]_{-2}^{1}-\frac{1}{8}\int_{-2}^{1}(x-1)^8dx\\&=0-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{9}(x-1)^9\right]_{-2}^{1}\\&=-\frac{1}{8}\left\{-\frac{1}{9}(-3)^9\right\}\\&=-\frac{2187}{8}\end{aligned}$$

別解　$x-1=t$ とおくと、$dx=dt$
x：$-2\to1$ のとき、t：$-3\to0$
よって

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^7dx&=\int_{-3}^{0}(t+3)\cdot t^7dt\\&=\int_{-3}^{0}(t^8+3t^7)dt\\&=\left[\frac{1}{9}t^9+\frac{3}{8}t^8\right]_{-3}^{0}\\&=-\frac{1}{9}(-3)^9-\frac{3}{8}(-3)^8\\&=-\frac{2187}{8}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x+2)^{p+1}(x-1)^q dx&=\int_{-2}^{1}(x+2)^{p+1}\left\{\frac{1}{q+1}(x-1)^{q+1}\right\}'dx\\&=\left[\frac{1}{q+1}\cdot(x+2)^{p+1}(x-1)^{q+1}\right]_{-2}^{1}\\&\quad-\frac{1}{q+1}\int_{-2}^{1}(p+1)(x+2)^p(x-1)^{q+1}dx\\&=\frac{-(p+1)}{q+1}\int_{-2}^{1}(x+2)^p(x-1)^{q+1}dx\end{aligned}$$
（ス：⑤、セ：⑥）

(4)　求める体積を V とすると、(3)の結果を利用して

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-2}^{1}(x+2)^4(x-1)^4dx\\&=-\frac{4}{5}\pi\cdot\int_{-2}^{1}(x+2)^3(x-1)^5dx\\&=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\pi\cdot\int_{-2}^{1}(x+2)^2(x-1)^6dx\\&=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\pi\cdot\int_{-2}^{1}(x+2)^1(x-1)^7dx\\&=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\pi\cdot\int_{-2}^{1}(x-1)^8dx\\&=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\pi\cdot\left[\frac{1}{9}(x-1)^9\right]_{-2}^{1}\\&=\frac{2187}{70}\pi\end{aligned}$$

参考　ベータ関数の積分

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad(m、n\text{ は非負整数})$$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-2}^{1}(x+2)^4(x-1)^4dx\\&=\pi\cdot(-1)^4\cdot\frac{4!4!}{(4+4+1)!}\{1-(-2)\}^{4+4+1}\\&=\pi\cdot\frac{4!4!}{9!}\cdot(-3)^9\\&=\frac{2187}{70}\pi\end{aligned}$$