◇２０２４年度　東北医科薬科

1 座標平面上の３次曲線 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a、b、c は定数) が、次の２つの条件 (ⅰ)、(ⅱ) を満たすとする。

(ⅰ) $x=p$ で極小値１をとり、$x=q$ で極大値をとる。

(ⅱ) $y=f(x)$ の変曲点 $(r,\ f(r))$ の y 座標は $f(r)=3$ である。

このとき、以下の問いに答えなさい。

(1)

(1−1) $q=-\dfrac{\boxed{ア}\,a+\boxed{イ}\,p}{\boxed{ウ}}$、極大値は $f(q)=\boxed{エ}$ である。

(1−2) $y=f(x)$ と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である。

(2) ２点 $(p,\ 1)$、$(q,\ f(q))$ を通る直線を ℓ とおく。

(2−1) ℓ の傾きは $\boxed{クケ}$ である。

(2−2) ℓ が点 $(3,\ -9)$ を通るとき $p=\boxed{コサ}$、$a=\boxed{シ}$ である。

解説

(1) (1−1)

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$ より

$f''(x)$ は$x=-\dfrac{a}{3}$ の前後で符号変化するので、$x=-\dfrac{a}{3}$ で変曲点となる。

よって、変曲点の座標は$\left(-\dfrac{a}{3},\ f\left(-\dfrac{a}{3}\right)\right)$ となる。

また、変曲点は、極大値と極小値の中点より ………(※)

$$\begin{cases}\dfrac{p+q}{2}=-\dfrac{a}{3} & \cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{f(p)+f(q)}{2}=f\left(-\dfrac{a}{3}\right) & \cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

① より、$q=-\dfrac{2a+3p}{3}$ ……… ③

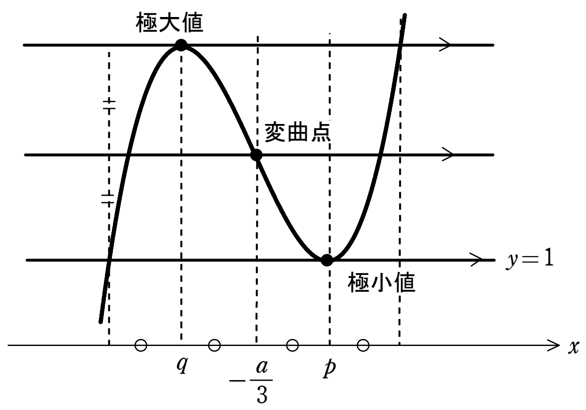
② より、$f(q)=2f\left(-\dfrac{a}{3}\right)-f(p)$

(ⅰ) より、$f(p)=1$、(ⅱ) より、$f\left(-\dfrac{a}{3}\right)=3$ より

$f(q)=2\cdot3-1=5$ ……… ④

参考 (※) について

３次関数は変曲点に関して点対称で、下図のように等間隔になっている。



(1−2) $y=1$ と $y=f(x)$ の $x=p$ 以外の交点の x 座標は、三次関数のグラフの性質 (上記 参考) と ③ より

$$q-\left\{p-\left(-\frac{a}{3}\right)\right\}=-\frac{2a+3p}{3}-p-\frac{a}{3}$$
$$=-2p-a$$

よって、$y=f(x)$ と $y=1$ で囲まれている部分の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{12}\{p-(-2p-a)\}^4 \quad\cdots\cdots\cdots(※※)$$
$$=\frac{1}{12}(3p+a)^4$$
$$=\frac{1}{12}\left\{3p-\frac{3}{2}(p+q)\right\}^4 \quad \left(① より、a=-\frac{3}{2}(p+q)\right)$$
$$=\frac{1}{12}\left\{\frac{3}{2}(p-q)\right\}^4$$
$$=\frac{27}{64}(p-q)^4$$

また、$f(q)-f(p)=\displaystyle\int_p^q f'(x)dx$ 、④ より

$$5-1=\int_p^q(3x^2+2ax+b)dx$$

$$\therefore\ 4=\int_p^q(3x^2+2ax+b)dx$$

$y=f(x)$ は$x=p$、q で極値をもつ、つまり $f'(x)=0$ は$x=p$、q を解にもつので

$$f'(x)=3(x-p)(x-q)$$

となる。よって

$$4=3\int_p^q(x-p)(x-q)dx$$

$$\therefore\ 4=-\frac{3}{6}(q-p)^3$$

$$\therefore\ (p-q)^3=8$$

$$\therefore\ p-q=2 \quad\cdots\cdots\cdots ⑤$$

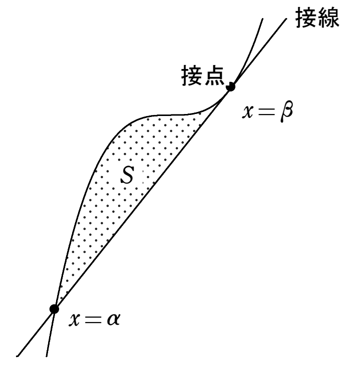
よって、$S=\dfrac{27}{64}\cdot2^4=\dfrac{27}{4}$

参考 (※※) について

図のように三次関数と接線で囲まれている部分の面積は

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

となる。



$y=ax^3+bx^2+cx+d$

(2) (2−1)

(1) より、$(\ell の傾き)=\dfrac{f(p)-f(q)}{p-q}$

$$=\frac{1-5}{2}$$
$$=-2$$

(2−2) 直線 ℓ は$y=-2(x-p)+1$ と表される。

これが $(3,\ -9)$ を通るので

$$-9=-2(3-p)+1$$

$$\therefore\ p=-2$$

⑤ より、$-2-q=2$

$$\therefore\ q=-4$$

① より、$-\dfrac{a}{3}=\dfrac{-2-4}{2}$

$$\therefore\ a=9$$

2 座標平面上の動点Pは原点Oの位置にある。この点Pの次の試行により移動させる。赤球4個、青球3個、黄球2個、白球1個の計10個の球が袋の中に入っている。この袋から赤球を取り出したときは点Pを x 方向に $+1$ だけ、青球を取り出したときは点Pを y 軸方向に $+1$ だけ、黄球を取り出したときは点Pを x 軸方向に -1 だけ、白球を取り出したときは点Pを y 軸方向に -1 だけ移動させるという指示である。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 袋の中から1個球を取り出し、その球の指示に従い点Pを移動し、取り出した球を袋に戻す。この試行を2回行った後、点Pが元の原点Oの位置にある確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である。OとPの距離OPがOP＞1となる確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である。

(2) 袋の中から1個球を取り出し、その球の指示に従い点Pを移動し、取り出した球を袋に戻す。この試行を4回行った後、点Pが元の原点Oの位置にある確率は $\dfrac{\boxed{ケコサ}}{\boxed{シスセソ}}$ である。

(3) 袋の中から1個ずつ元に戻さずに5個取り出し、取り出した順の指示に従って点Pを5回移動する。このとき、点Pが y 軸上にある確率は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。

(4) 袋の中から1個ずつ元に戻さずに6回取り出し、取り出した順の指示に従って点Pを6回移動する。このとき、点Pが直線 $y=x$ 上にある確率は $\dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{トナ}}$ である。

解説

1回の試行で点Pの動きについて、下の表のように設定する。

事象	方向	移動距離
A	x 軸	$+1$
B	y 軸	$+1$
C	x 軸	-1
D	y 軸	-1

(1) 2回後に原点Oにいるのは、次の(ⅰ)、(ⅱ)のときである。

(ⅰ) A と C が1回ずつ起こる

(ⅱ) B と D が1回ずつ起こる

よって、求める確率は

$$ {}_2C_1\left(\frac{4}{10}\right)\cdot\left(\frac{2}{10}\right)+{}_2C_1\left(\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{11}{50} $$

また、OP>1となるのは、2回後に原点Oにいないときより

$$ 1-\frac{11}{50}=\frac{39}{50} $$

(2) 4回後に原点Oにいるのは、次の(ⅰ)～(ⅲ)のときである。

(ⅰ) A と C が2回ずつ起こる

(ⅱ) B と D が2回ずつ起こる

(ⅱ) A、B、C、D が1回ずつ起こる

よって、求める確率は

$$ {}_4C_2\left(\frac{4}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2+{}_4C_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+4!\cdot\left(\frac{4}{10}\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{2}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{507}{5000} $$

(3) 5回後に y 軸上にいるのは、次の(ⅰ)、(ⅱ)のときである。

(ⅰ) A と C が1回ずつ起こり、残り3回は B または D

(ⅱ) A と C が2回ずつ起こり、残り1回は B または D

よって、求める確率は

$$ \frac{\frac{5!}{3!}\cdot4\cdot2\cdot{}_4P_3}{{}_{10}P_5}+\frac{\frac{5!}{2!\cdot2!}\cdot{}_4P_2\cdot{}_2P_2\cdot4}{{}_{10}P_5}=\frac{2}{9} $$

(4) 6回後に $y=x$ 上にいるのは、次の(ⅰ)～(ⅳ)のときである。

(ⅰ) $(3,\ 3)$ にいるときより、A と B が3回ずつ起こる

(ⅱ) $(2,\ 2)$ にいるときより、$\begin{cases} A\text{が3回、}B\text{が2回、}C\text{が1回起こる} \\ A\text{が2回、}B\text{が3回、}D\text{が1回起こる} \end{cases}$

(ⅲ) $(1,\ 1)$ にいるときより、$\begin{cases} A\text{が3回、}B\text{が1回、}C\text{が2回起こる} \\ A\text{と}B\text{が2回ずつ、}C\text{と}D\text{が1回ずつ起こる} \end{cases}$

(ⅳ) $(0,\ 0)$ にいるときより、A と C が2回ずつ、B と D が1回ずつ起こる

(ⅰ)のときの確率は

$$ \frac{{}_6C_3\cdot{}_4P_3\cdot3!}{{}_{10}P_6}=\frac{2}{105} $$

(ⅱ)のときの確率は

$$ \frac{\frac{6!}{3!2!}({}_4P_3\cdot{}_3P_2\cdot2+{}_4P_2\cdot3!\cdot1)}{{}_{10}P_6}=\frac{5}{35} $$

(ⅲ)のときの確率は

$$ \frac{\frac{6!}{3!2!}\cdot{}_4P_3\cdot3\cdot2!+\frac{6!}{2!2!}\cdot{}_4P_2\cdot{}_3P_2\cdot2\cdot1}{{}_{10}P_6}=\frac{8}{35} $$

(ⅳ)のときの確率は

$$ \frac{\frac{6!}{2!2!}\cdot{}_4P_3\cdot{}_3P_2\cdot2}{{}_{10}P_6}=\frac{3}{35} $$

以上より、求める確率は

$$ \frac{2}{105}+\frac{5}{35}+\frac{8}{35}+\frac{3}{35}=\frac{10}{21} $$

3　座標平面において、極方程式 $r=\dfrac{3}{5-3\cos\theta}$ で与えられる楕円の直交座標 $(x、y)$ による方程式 $f(x、y)=0$ とおく。以下の問いに答えなさい。

(1)　楕円 $f(x、y)=0$ の長軸の長さは $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$、短軸の長さは $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　楕円 $f(x、y)=0$ の焦点は $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}、\boxed{\text{ク}}\right)$ と $\left(\boxed{\text{ケ}}、\boxed{\text{コ}}\right)$ である。

ただし、$\boxed{\text{ケ}}<\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ とする。

(3)　楕円 $f(x、y)=0$ を y 軸に関して対称な楕円になるように x 軸方向に平行移動する。この y 軸対称の楕円の方程式を $g(x、y)=0$ とする。楕円 $g(x、y)=0$ と直線 $16\sqrt{3}\,x+20y-15\sqrt{3}=0$ の 2 つの共有点の座標は

$$\left(\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}、\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)\text{および}\left(\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}、\boxed{\text{ニ}}\right)$$

である。ただし、$\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}<\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ とする。

解説

(1)　原点を極、x 軸を始線とすると、$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$、$r^2=x^2+y^2$ となるので

$r=\dfrac{3}{5-3\cos\theta}$ より

$$\begin{aligned}
&r(5-3\cos\theta)=3\\
\therefore\ &5r=3r\cos\theta+3\\
\therefore\ &5r=3x+3\\
\therefore\ &25r^2=9(x+1)^2\\
\therefore\ &25(x^2+y^2)=9x^2+18x+9\\
\therefore\ &16x^2+25y^2-18x=9\\
\therefore\ &16\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+25y^2=\frac{225}{16}\\
\therefore\ &\frac{\left(x-\frac{9}{16}\right)^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1
\end{aligned}$$

よって、楕円 $f(x、y)=0$ の長軸は $2\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{15}{8}$、短軸は $2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$

(2)　$\dfrac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$ の焦点の座標は

$$\left(\pm\sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}、0\right)=\left(\pm\frac{9}{16}、0\right)$$

よって、x 軸方向に $+\dfrac{9}{16}$ 平行移動して、$f(x、y)=0$ の焦点の座標は

$$\left(\frac{9}{16}+\frac{9}{16}、0\right)=\left(\frac{9}{8}、0\right)$$
$$\left(-\frac{9}{16}+\frac{9}{16}、0\right)=(0、0)$$

(3)　(2) より、$g(x、y)=0$ は $\dfrac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$ である。

x 軸方向に $\dfrac{16}{15}$ 倍、y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍拡大すると

・$\dfrac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$ は、$x^2+y^2=1$ ……①

・$16\sqrt{3}\,x+20y-15\sqrt{3}=0$ は、

$16\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{15}{16}x\right)+20\cdot\left(\dfrac{3}{4}y\right)-15\sqrt{3}=0$ より、$\sqrt{3}\,x+y-\sqrt{3}=0$ ……②

①、② から y を消去して

$$\begin{aligned}
&x^2+(-\sqrt{3}\,x+\sqrt{3})^2=0\\
\therefore\ &2x^2--3x+1=0\\
\therefore\ &(2x-1)(x-1)=0\\
\therefore\ &x=\frac{1}{2}、1
\end{aligned}$$

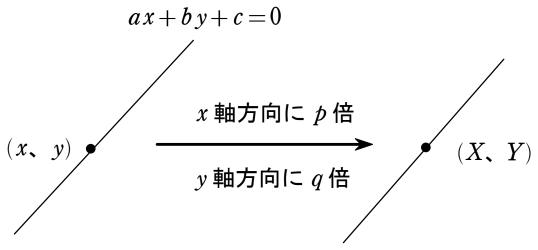
よって、①、② の交点の座標は、$\left(\dfrac{1}{2}、\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$(1、0)$

x 軸方向に $\dfrac{15}{16}$ 倍、y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍拡大すると、求める共有点の座標は

$$\left(\frac{15}{32}、\frac{\sqrt{3}}{8}\right)、\left(\frac{15}{16}、0\right)$$

参考　② について

$ax+by+c=0$ 上の点 $(x、y)$ を、x 軸方向に p 倍、y 軸方向に q 倍に拡大した点が $(X、Y)$ とすると



$\begin{cases}X=px\\Y=qy\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}x=\dfrac{X}{p}\\y=\dfrac{Y}{q}\end{cases}$ となるので

$ax+by+c=0$ に代入して、$a\left(\dfrac{X}{p}\right)+b\left(\dfrac{Y}{q}\right)+c=0$

よって、$a\left(\dfrac{x}{p}\right)+b\left(\dfrac{y}{q}\right)+c=0$ となるので

$16\sqrt{3}\,x+20y-15\sqrt{3}=0$ を x 軸方向に $\dfrac{16}{15}$ 倍、y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍拡大すると

$$16\sqrt{3}\cdot\left(\frac{15}{16}x\right)+20\cdot\left(\frac{3}{4}y\right)-15\sqrt{3}=0$$

つまり、② となる。

別解　$\dfrac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$ と $16\sqrt{3}\,x+20y-15\sqrt{3}=0$ の交点より

$\begin{cases}\left(\dfrac{16}{15}\right)^2x^2+\dfrac{16}{9}y^2=1\\x=-\dfrac{5}{4\sqrt{3}}y+\dfrac{15}{16}\end{cases}$ を連立して

よって、$\left(\dfrac{16}{15}\right)^2\left(-\dfrac{5}{4\sqrt{3}}y+\dfrac{15}{16}\right)^2+\dfrac{16}{9}y^2=1$

$$\begin{aligned}
\therefore\ &\left(\frac{16}{15}\right)^2\left\{\frac{25}{48}y^2-\frac{5\times15}{32\sqrt{3}}y+\left(\frac{15}{16}\right)^2\right\}+\frac{16}{9}y^2=1\\
\therefore\ &\frac{4^2}{3^3}y^2-\frac{8}{3\sqrt{3}}y+1+\frac{4^2}{3^2}y^2-1\\
\therefore\ &\frac{4^3}{3^3}y^2-\frac{8\sqrt{3}}{3^2}y=0\\
\therefore\ &y\left(\frac{8}{3}y-\sqrt{3}\right)=0\\
\therefore\ &y=0、\frac{3\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

よって、求める共有点の座標は、$\left(\dfrac{15}{32}、\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$、$\left(\dfrac{15}{16}、0\right)$