◇２０２４年度昭和大学医学部　Ⅱ期

1 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入すること。

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たす複素数 z の値を求めよ。また、このとき $z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}$ の値を求めよ。

(2)　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は、どのような図形かを述べよ。

(3)　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる複素数 z と、$|w+2-2i|=1$ を満たす複素数 w について、$|z-w|$ の最小値を求めよ。ただし、i を虚数単位とする。

(4)　n は正の整数とする。次の群に分けられた数列について考える。

1|1、1|1、2、1|1、3、3、1|1、4、6、4、1|1、5、10、5、1|1、6、15、20、15、6、1|⋯

(4−1)　第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。

(4−2)　与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの総和を求めよ。

解説

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ より、$z^2-\sqrt{2}z+1=0$

$$\therefore\quad z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$$
$$=\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

よって、
$$z^{2024}=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{2024}$$
$$=\cos(\pm500\pi)+i\sin(\pm500\pi)$$
$$=\cos(\pm250\times2\pi)+i\sin(\pm250\times2\pi)$$
$$=1$$

したがって、$z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}=1+1=2$

(2)　$z+\dfrac{1}{z}$ $(z\neq0)$ が実数より

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$$
$$\therefore\quad z^2\cdot\overline{z}+\overline{z}=z\cdot(\overline{z})^2+z$$
$$\therefore\quad z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$$
$$\therefore\quad (z\overline{z}-1)(z-\overline{z})=0$$
$$\therefore\quad z\overline{z}=1、z=\overline{z}$$
$$\therefore\quad |z|=1、z=\overline{z}$$

これより z が複素数平面上で表す図形は

原点を除く実軸上、または原点を中心とする半径 1 の円周上

である。

別解　$z=x+yi$ (x、y は実数) とおくと $(x^2+y^2\neq0)$

$$z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}$$
$$=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{(x+yi)(x^2+y^2)+x-yi}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{x(x^2+y^2+1)+y(x^2+y^2-1)i}{x^2+y^2}$$

これが実数より、$y(x^2+y^2-1)=0$

よって、$y=0$ または、$x^2+y^2=1$

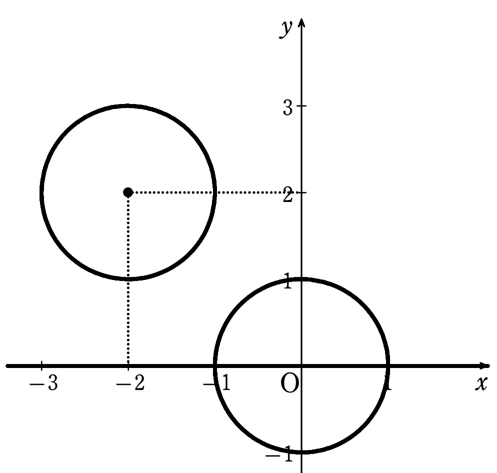
これより z が複素数平面上で表す図形は

原点を除く実軸上、または原点を中心とする半径 1 の円周上

である。

(3)　P(z)、Q(w) とする。

Q(w) が複素数平面上で表す図形は $|w-(-2+2i)|=1$ より、点 $-2+2i$ を中心とする半径 1 の円周上を動く。



ここで $|z-w|$ は線分 PQ の長さを表すので

(ⅰ)　P(z) が実軸上を動くとき

PQ が最小となるのは、点 $-2+2i$ から実軸に下した垂線と円との交点が Q(w) 実軸上の点が P(z) となるときである。このとき

$$|z-w|=2-1=1$$

(ⅱ)　P(z) が円上を動くとき

PQ が最小となるのは、点 $-2+2i$ と原点を結んだ線分と2円との交点がそれぞれ Q(w)、P(z)となるときである。このとき

$$|z-w|=\sqrt{2^2+2^2}-1-1=2\sqrt{2}-2$$

(ⅰ)、(ⅱ) より、$2\sqrt{2}-2-1=2\sqrt{2}-3$
$$=\sqrt{8}-\sqrt{9}$$
$$<0$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{2}-2<1$$

よって、最小値は $2\sqrt{2}-2$

(4)

(4−1)　第 n 群に含まれる項は

$${}_{n-1}C_0、{}_{n-1}C_1、{}_{n-1}C_2、\cdots\cdots\cdots、{}_{n-1}C_{n-1}$$

よって、求める総和は

$$\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_k=(1+1)^{n-1}$$
$$=2^{n-1}$$

(4−2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{2^n-1}{2-1}$
$$=2^n-1$$

2 x、y は実数とする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$\log_2(1-3x)+\log_4(x+3)\leqq 2$ を満たすような実数 x の範囲を不等式を用いて表せ。

(2)　$[x]$ は $n\leqq x<n+1$ を満たす整数 n を表す。方程式 $[3x]-[x]=2$ を満足する x の範囲を不等式を用いて表せ。

(3)　$x>0$ とする。$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ。

(4)　実数 x 、y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たすとき、$x+2xy+y$ の最大値と最小値を求めよ.

(5)　不等式 $||x|-1|+|y|\leqq 1$ を満足する領域を xy 平面上に図示せよ。

(解説)

(1)　真数条件より、$\begin{cases}1-3x>0\\x+3>0\end{cases}$　∴　$\begin{cases}x<\dfrac{1}{3}\\x>-3\end{cases}$

よって、$-3<x<\dfrac{1}{3}$ ………①

与式より、$\log_2(1-3x)+\dfrac{\log_2(x+3)}{\log_2 4}\leqq 2$

∴　$\log_2(1-3x)+\dfrac{1}{2}\log_2(x+3)\leqq 2$

∴　$2\log_2(1-3x)+\log_2(x+3)\leqq 4$

∴　$\log_2(1-3x)^2(x+3)\leqq\log_2 2^4$

底＞1より

$(1-3x)^2(x+3)\leqq 16$

∴　$9x^3+21x^2-17x-13\leqq 0$

∴　$(x-1)(9x^2+30x+13)\leqq 0$

∴　$x\leqq\dfrac{-5-2\sqrt{3}}{3}$、$\dfrac{-5+2\sqrt{3}}{3}\leqq x\leqq 1$

①を考慮して

$-3<x\leqq\dfrac{-5-2\sqrt{3}}{3}$、$\dfrac{-5+2\sqrt{3}}{3}\leqq x<\dfrac{1}{3}$

(2)　$x=n+\alpha$（n は自然数、$0\leqq\alpha<1$）とおくと

（ｉ）　$0\leqq\alpha<\dfrac{1}{3}$ のとき

$\begin{cases}[3x]=[3n+3\alpha]=3n\\[x]=[n+\alpha]=n\end{cases}$ より

与式から、$3n-n=2$

∴　$n=1$

∴　$x=1+\alpha$

よって、$1\leqq\alpha<\dfrac{4}{3}$

（ii）　$\dfrac{1}{3}\leqq\alpha<\dfrac{2}{3}$ のとき

$\begin{cases}[3x]=[3n+3\alpha]=3n+1\\[x]=[n+\alpha]=n\end{cases}$ より

与式から、$(3n+1)-n=2$

∴　$n=\dfrac{1}{2}$

よって、不適。

（iii）　$\dfrac{2}{3}\leqq\alpha<1$ のとき

$\begin{cases}[3x]=[3n+3\alpha]=3n+2\\[x]=[n+\alpha]=n\end{cases}$ より

与式から、$(3n+2)-n=2$

∴　$n=0$

∴　$x=\alpha$

よって、$\dfrac{2}{3}\leqq x<1$

（ｉ）～（iii）より、$\dfrac{2}{3}\leqq x<\dfrac{4}{3}$

(3)　$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{2}$

$x^2>0$、$\dfrac{1}{x^2}>0$ より、相加相乗平均の大小関係から

$x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{2}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

等号は、$x^2=\dfrac{1}{x^2}$ のとき

つまり、$x^4=1$

∴　$x^2=1$

$x>0$ より、$x=1$ のとき成立。

よって、$x=1$ のとき、最小値 $\dfrac{9}{2}$

(4)　$x+y=s$、$xy=t$ とおくと

$x^2+xy+y^2=1$ より

$(x+y)^2-xy=1$

∴　$s^2-t=1$

∴　$t=s^2-1$ ………①

また、x、y は、$X^2-sX+t=0$ の実数解より

$D=s^2-4t\geqq 0$

∴　$t\leqq\dfrac{s^2}{4}$

①を代入して

$s^2-1\leqq\dfrac{s^2}{4}$

∴　$3s^2-4\leqq 0$

∴　$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqq s\leqq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ………②

これより、$x+2xy+y=s+2t$

$=s+2(s^2-1)$　（∵ ①より）

$=2\left(s+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{17}{8}$

②より、$s=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき、最大値 $\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$

$s=-\dfrac{1}{4}$ のとき、最小値 $-\dfrac{17}{8}$

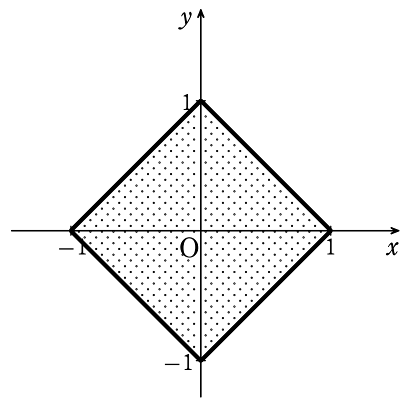
(5)　x に $-x$ を代入しても、与式は不変より、与式が表す領域は y 軸対称である。

よって、$x\geqq 0$ で考える。

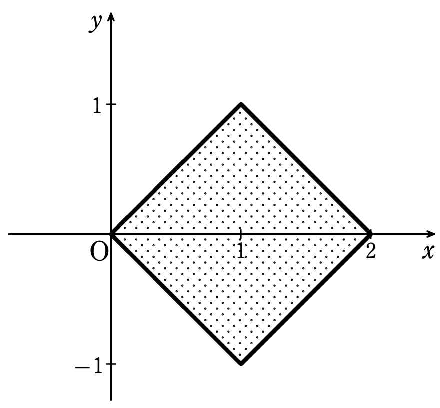
このとき与式は、$|x-1|+|y|\leqq 1$ となる。

これは、$|x|+|y|\leqq 1$ ……①を x 軸方向に $+1$ 平行移動したもので、①の x に $-x$、y に $-y$ を代入しても①は不変より、①は x 軸、y 軸対称である。

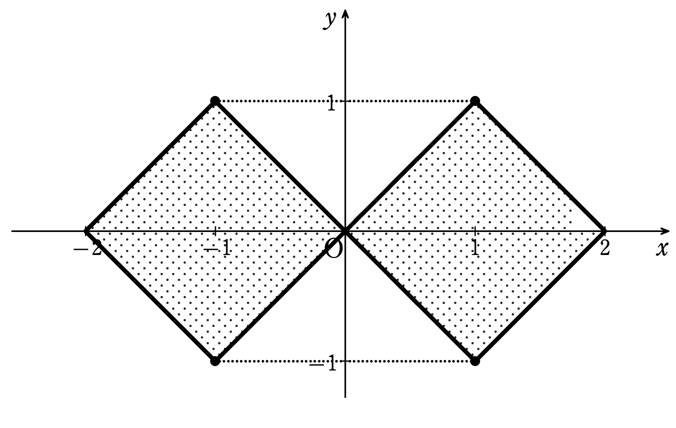
$x\geqq 0$、$y\geqq 0$ で ①は $x+y\leqq 1$ となるので、①の領域は下図の打点部分になる。（ただし、境界線は含む）



これを x 軸方向に $+1$ 平行移動すると、以下のようになる。



よって、求める領域は、下図の打点部分になる。（ただし、境界線は含む）



3　xy 平面において、曲線 $y=x^4-4x^2+4x+2$ を ①、曲線 ① と異なる 2 点で接する直線を ②、直線 ②と平行で曲線 ① にただ 1 点で接する直線を ③とする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入すること。

(1)　直線 ② の方程式を求めよ。

(2)　直線 ③ の方程式を求めよ。

(3)　曲線 ① と直線 ② で囲まれた面積 S_1 を求めよ。

(4)　曲線 ① と直線 ③ で囲まれたすべての部分の面積の和 S_2 を求めよ。

(5)　$f(x)=x^4-4x^2+4x+2$ は、$x=\alpha$、$\beta\ (\alpha \fallingdotseq \beta)$ で極小値をとり、$x=\gamma$ で極大値をとるものとする。3 点 $(\alpha、f(\alpha))$、$(\beta、f(\beta))$、$(\gamma、f(\gamma))$ をすべて通り、軸が y 軸に平行な放物線の方程式を求めよ。

解説

(1)　直線 ② を$y=mx+n$ 、① との接点のx 座標を$x=p$、q とすると

①、② が$x=p$、q で接するので

$$x^4-4x^2+4x+2=mx+n$$

$$\therefore\quad x^4-4x^2+(4-m)x+2-n=0$$

が 2 つの重解 $x=p$、q をもつ。

よって、$x^4-4x^2+(4-m)x+2-n=(x-p)^2(x-q)^2$ と因数分解できる。

$$(\text{左辺})=(x-p)^2(x-q)^2$$

$$=x^4-2(p+q)x^3+(p^2+4pq+q^2)x^2-2pq(p+q)x+p^2q^2$$

両辺係数比較して

$$\begin{cases} 0=-2(p+q) \cdots\cdots ① \\ -4=p^2+4pq+q^2 \cdots\cdots ② \\ 4-m=-2pq(p+q) \cdots\cdots ③ \\ 2-n=(pq)^2 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

① より、$p+q=0$ ……… ⑤

③ より、$4-m=0$

$\therefore\quad m=4$

② より、$(p+q)^2+2pq=-4$

⑤ より、$2pq=-4$

$\therefore\quad pq=-2$　……… ⑥

④ より、$2-n=4$

$\therefore\quad n=-2$

よって、② の方程式は、$y=4x-2$

(2)　$y=x^4-4x^2+4x+2$ より、$y'=4x^3-8x+4$

② ∥ ③ より、$4x^3-8x+4=4$

$\therefore\quad x^3-2x=0$

$\therefore\quad x(x^2-2)=0$

$\therefore\quad x=0、\pm\sqrt{2}$

ここで (1) のp、q は、⑤、⑥ より、t に関する方程式 $t^2-2=0$ の 2 解である。

よって、$t=\pm\sqrt{2}$ となるので、① と ③ の接点の x 座標は $x=0$ となる。

これより、③ の方程式は $(0、2)$ における接線となるので、$y=4x+2$

(3)　①、② は$x=\pm\sqrt{2}$ で接するので、求める面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\{(x^4-4x^2+4x+2)-(4x-2)\}dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^4-4x^2+4)dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}(x^4-4x^2+4)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{64}{15}\sqrt{2}$$

別解　1/30 公式の利用

①、② は$x=\pm\sqrt{2}$ で接するので、求める面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\{(x^4-4x^2+4x+2)-(4x-2)\}dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2dx$$

$$=\frac{1}{30}\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^5$$

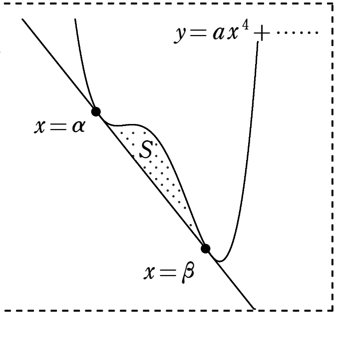
$$=\frac{64}{15}\sqrt{2}$$

参考　＜1/30 公式＞

4 次関数と複接線が$x=\alpha$、β $(\alpha<\beta)$で接するとき、
2 つのグラフで囲まれている部分の面積 S は

$$S=\frac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$$

となる。



(4)　① と ③ の交点より

$$x^4-4x^2+4x+2=4x+2$$

$$\therefore\quad x^4-4x^2=0$$

$$\therefore\quad x^2(x^2-4)=0$$

$$\therefore\quad x=0、\pm 2$$

よって、求める面積 S_2 は

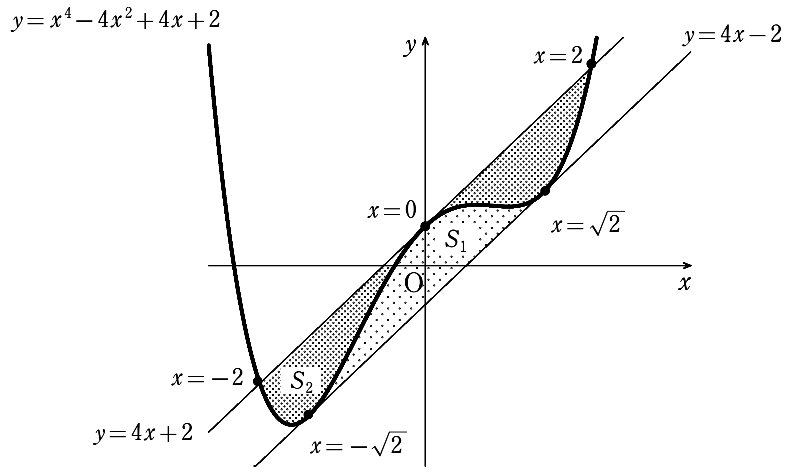
$$S_2=\int_{-2}^{2}\{(4x+2)-(x^4-4x^2+4x+2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(4x^2-x^4)dx$$

$$=2\int_0^2(4x^2-x^4)dx$$

$$=2\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{5}x^4\right]_0^2$$

$$=\frac{128}{15}$$



(5)　求める放物線を$y=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$ …… ⑤ とおく。

$x=\alpha$、β、γ は $f'(x)=0$ の異なる 3 個の実数解より

$$f'(x)=4x^3-8x+4=0$$

$$\therefore\quad x^3-2x+1=0$$

$$\therefore\quad (x-1)(x^2+x-1)=0$$

$$\therefore\quad x=1、\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x=1$ のとき、$y=3$ より ⑤ から

$$a+b+c=3 \cdots\cdots ⑥$$

また、$u=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ とおくと、u は$u^2+u-1=0$ を満たすので

$$f(u)=(u^2+u-1)(u^2-u-2)+5u=5u$$

となる。よって、

$x=u$ のとき、$y=5u$ となるので ⑤ より

$$5u=au^2+bu+c$$

$$\therefore\quad 5u=a(-u+1)+bu+c\quad (\because\ u^2=-u+1)$$

$u=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}a+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}b+c=\frac{-5+5\sqrt{5}}{2} \cdots\cdots ⑦$$

$u=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}a+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}b+c=\frac{-5-5\sqrt{5}}{2} \cdots\cdots ⑧$$

⑦+⑧ より、$3a-b+2c=-5$ …… ⑨

⑦−⑧ より、$-\sqrt{5}a+\sqrt{5}b=5\sqrt{5}$

$\therefore\quad -a+b=5$…… ⑩

⑥、⑨、⑩ より、$a=-2$、$b=3$、$c=2$

よって、求める放物線は、$y=-2x^2+3x+2$

別解　$f'(x)=4(x^3-2x+1)$ より

$$f(x)=x(x^3-2x+1)-2x^2+3x+2$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{x}{4}\cdot f(x)-2x^2+3x+2$$

$g(x)=-2x^2+3x+2$ とおくと

$$f(x)=\frac{x}{4}\cdot f'(x)+g(x)$$

ここで、$x=\alpha$、β、γ は $f'(x)=0$ の異なる 3 個の実数解より

$$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$$

となるので、

$$f(\alpha)=g(\alpha)、f(\beta)=g(\beta)、f(\gamma)=g(\gamma)$$

となる。

これより、3 点 $(\alpha、f(\alpha))$、$(\beta、f(\beta))$、$(\gamma、f(\gamma))$ は $y=g(x)$ 上に存在し、
軸が y 軸に平行な放物線は、3 点が決まれば唯一つに決まるので、
求める放物線は

$$y=-2x^2+3x+2$$

となる。

4 ある地域で感染症 A が流行している。その地域の住民を無作為に選んで感染症 A の検査 X を行うこととした。実際に感染症 A に感染している人が検査 X を受けると $\frac{7}{10}$ の確率で陽性と判定される。ところが実際には感染症 A に感染していない人でも検査 Xを受けると $\frac{1}{10}$ の確率で陽性と判定されてしまう。ここで、その地域の住民全体に占める真の感染症の割合を $\frac{1}{100}$ とするとき、次の各問いに答えよ。ただし、答えは既約分数で表して、結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 無作為に選ばれた人が検査 X を受けたとき、感染症 A にかかっていて、かつ検査 X で陽性と判定される確率を求めよ。

(2) 無作為に選ばれた人が検査 X を受けたとき、陽性と判定される確率を求めよ。

(3) 検査 X で陽性と判定された人が実際に感染症 A に感染している確率を求めよ。

(4) 検査 X で陽性と判定されなかった人が実際に感染症 A に感染していない確率を求めよ。

(5) 検査 X で陽性と判定された人には速やかに 2 回目の検査 X を行う。2 回目の検査 X でも陽性と判定された人が実際に感染症 A に感染している確率を求めよ。

解説

ある感染症 A に感染しているという事象をA、検査 X で陽性と判定されるという事象をBとすると

$$P_A(B)=\frac{7}{10}、P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{10}、P(A)=\frac{1}{100}$$

よって、$P_A(\overline{B})=\frac{3}{10}$、$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{9}{10}$、$P(\overline{A})=\frac{99}{100}$

(1)
$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P_A(B)\cdot P(A)\\&=\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{100}\\&=\frac{7}{1000}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}P(B)&=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\\&=\frac{7}{1000}+P_{\overline{A}}(B)\cdot P(\overline{A})\\&=\frac{7}{1000}+\frac{1}{10}\cdot\frac{99}{100}\\&=\frac{7}{1000}+\frac{99}{1000}\\&=\frac{53}{500}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}P_B(A)&=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\&=\frac{\frac{7}{10000}}{\frac{53}{500}}\\&=\frac{7}{106}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B})&=P_{\overline{A}}(\overline{B})\cdot P(\overline{A})\\&=\frac{9}{10}\cdot\frac{99}{100}\end{aligned}$$

(2) より、
$$\begin{aligned}P(\overline{B})&=1-P(B)\\&=1-\frac{53}{500}\\&=\frac{447}{500}\end{aligned}$$

よって、
$$\begin{aligned}P_{\overline{B}}(\overline{A})&=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}\\&=\frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{99}{100}}{\frac{447}{500}}\\&=\frac{297}{298}\end{aligned}$$

(5) 感染症 A に感染している人が、1 回目、2 回目の検査でともに陽性と判定される確率は

$$P(A)\times P_A(B)\times P_A(B)=\frac{1}{100}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{49}{10^4}$$

感染症 A に感染していない人が、1 回目、2 回目の検査でともに陽性と判定される確率は

$$P(\overline{A})\times P_A(B)\times P_A(B)=\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{99}{10^4}$$

よって、求める確率は、$\dfrac{\frac{49}{10^4}}{\frac{49+99}{10^4}}=\dfrac{49}{100}$