1 n は正の整数とする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　2次方程式 $x^2-x-1=0$ の2解を α、β $(\alpha<\beta)$ とし、$a_n=\alpha^n+\beta^n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える。次の各問いに答えよ。

(1−1)　a_1、a_2、a_3、a_4 の値を求めよ。

(1−2)　$n\geqq 3$ とする。一般項 a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ。

(1−3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。

(2)　n を3以上の整数、$1\leqq j\leqq n$、$1\leqq k\leqq n$ を満たす整数 j、k の組 $(j,\ k)$ 全体の集合を I とする。次の各問いに答えよ。ただし、結果はできる限り因数分解した n の式で答えよ。

(2−1)　組 $(j,\ k)$ が I 全体を動くとき、積 jk の総和 S_1 を求めよ。

(2−2)　組 $(j,\ k)$ が $j<k$ を満たして I の中を動くとき、積 jk の総和 S_2 を求めよ。

(2−3)　組 $(j,\ k)$ が $j<k-1$ を満たして I の中を動くとき、積 jk の総和 S_3 を求めよ。

解説

(1)

(1−1)　$x^2-x-1=0$ の2解が α、β より、解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1 \quad \cdots\cdots①$$

よって、① より

$$\begin{aligned}a_1&=\alpha+\beta\\&=1\\a_2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=1^2-2\cdot(-1)\\&=3\\a_3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=1^3-3\cdot(-1)\cdot1\\&=4\\a_4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2\\&=3^2-2\cdot(-1)^2\\&=7\end{aligned}$$

別解　(1−2) を先に解いて、② を用いる。

② より、$a_3=a_2+a_1=3+1=4$

$a_4=a_3+a_2=4+3=7$

(1−2)　

$$\begin{aligned}a_n&=\alpha^n+\beta^n\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})\\&=1\cdot a_{n-1}-(-1)\cdot a_{n-2}\quad(\because ①)\\&=a_{n-1}+a_{n-2}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

別解　$x^2-x-1=0$ の2解が α、β より

$$\begin{cases}\alpha^2-\alpha-1=0\\\beta^2-\beta-1=0\end{cases}$$

$n\geqq3$ において、それぞれに α^{n-2}、β^{n-2} を掛けて

$$\begin{cases}\alpha^n-\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2}=0\\\beta^n-\beta^{n-1}-\beta^{n-1}=0\end{cases}$$

両辺の和をとると

$$(\alpha^n+\beta^n)-(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=0$$

$\therefore\quad a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$

$\therefore\quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

(1−3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}$

ここで、$x^2-x-1=0$ から、$x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$

$\alpha<\beta$ より、$\alpha=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$、$\beta=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ となり

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5-3}{2}$ より 、$-1<\dfrac{\alpha}{\beta}<0$ となるので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}\\&=\beta\\&=\frac{1+\sqrt5}{2}\end{aligned}$$

(2)

(2−1)　

$$\begin{aligned}S_1&=(1+2+\cdots\cdots+n)(1+2+\cdots\cdots+n)\\&=\frac12n(n+1)\times\frac12n(n+1)\\&=\frac14n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

(2−2)　

$$\begin{aligned}S_2&=\frac12\{S_1-(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)\}\\&=\frac12\left\{\frac14n^2(n+1)^2-\frac16n(n+1)(2n+1)\right\}\\&=\frac1{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}\\&=\frac1{24}n(n+1)(3n^2-n-2)\\&=\frac1{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)\end{aligned}$$

参考　$n=5$ のとき

j ＼ k	1	2	3	4	5
1	1×1	1×2	1×3	1×4	1×5
2	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5
3	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5
4	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5
5	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5

・ に囲まれている部分の総和が S_1 に対応

・ に囲まれている部分の総和が S_2 に対応

・ に囲まれている部分の総和と S_2 は等しい

(2−3)　$S_3=S_2-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$

ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)&=\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)\\&=\frac16(n-1)n(2n-1)+\frac12(n-1)n\\&=\frac16(n-1)n\{(2n-1)+3\}\\&=\frac13(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}S_3&=\frac1{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)-\frac13(n-1)n(n+1)\\&=\frac1{24}(n-1)n(n+1)\{(3n+2)-8\}\\&=\frac18(n-2)(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

参考　$n=5$ のとき

j ＼ k	1	2	3	4	5
1	1×1	1×2	1×3	1×4	1×5
2	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5
3	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5
4	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5
5	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5

・ に囲まれている部分の総和が S_2 に対応

・ に囲まれている部分の総和が S_3 に対応

・ に囲まれている部分の総和が、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$ に対応

2 一辺の長さが1の正方形を底面とする立方体OABC－DEFGを考える。点Oを通る平面で立方体を切断し、右図のように3点P、Q、Rをとる。ただし、点Qは辺BF上にあるものとする。切断面の面積をS、$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$、$\beta=\angle\mathrm{COR}$とする。以下の問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

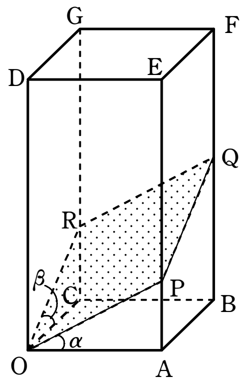
(1)　$\gamma=\angle\mathrm{POR}$とする。$\cos\gamma$を$\tan\alpha$、$\tan\beta$を用いて表せ。

(2)　面積Sを$\tan\alpha$、$\tan\beta$を用いて表せ。

(3)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$、$S=\dfrac{7}{6}$とする。次の各問いに答えよ。

(3－1)　$\tan\alpha+\tan\beta$の値を求めよ。

(3－2)　$\tan\alpha\tan\beta$の値を求めよ。



解説

(平面OPED)∥(平面RQFG) からOP∥RQ

(平面ORGD)∥(平面PQFE) からOR∥PQ

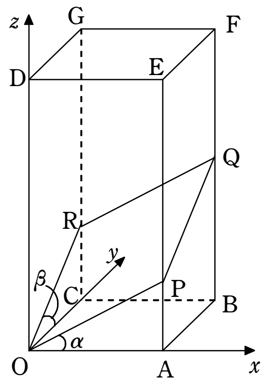
よって，四角形OPQRは平行四辺形である。

座標空間に四角柱OABC－DEFGをとり，Oを原点，直線OA，OC，ODを右の図のようにそれぞれx軸，y軸，z軸とすると

A(1, 0, 0)、C(0, 1, 0)、D(0, 0, 1)、

P(1, 0, $\tan\alpha$)、R(0, 1, $\tan\beta$)

となる。



(1)　OPとOQのなす角がγより

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\gamma$$

$$\therefore\ \tan\alpha\tan\beta=\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1+\tan^2\beta}\cdot\cos\gamma$$

$$\therefore\ \cos\gamma=\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1+\tan^2\beta}}$$

(2)　四角形OPQRは平行四辺形 より

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$$

$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$

$$=\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1}\quad\cdots\cdots ①$$

(3)　$\tan\alpha=a$、$\tan\beta=b$ とおくと

$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$、$0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$ から、$a\geqq0$、$b\geqq0$　……②

ここで、$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{a+b}{1-ab}$$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{a+b}{1-ab}$$

$$\therefore\ 1=\frac{a+b}{1-ab}$$

$$\therefore\ a+b=1-ab$$

$a+b=c$ とおくと、$ab=1-c$　……③

①から

$$S^2=a^2+b^2+1$$

$$=(a+b)^2-2ab+1$$

③を代入すると

$$S^2=c^2-2(1-c)+1$$

$$=c^2+2c-1$$

$S=\dfrac{7}{6}$ より

$$c^2+2c-1=\frac{49}{36}$$

$$\therefore\ 36c^2+72c-85=0$$

$$\therefore\ (6c-5)(6c+17)=0$$

$$\therefore\ c=\frac{5}{6},\ -\frac{17}{6}$$

②より、$c=a+b\geqq0$ より、$c=\dfrac{5}{6}$

よって、$a+b=\dfrac{5}{6}$

$c=\dfrac{5}{6}$ を③に代入すると、$ab=\dfrac{1}{6}$

以上より、$\tan\alpha+\tan\beta=a+b=\dfrac{5}{6}$

$$\tan\alpha\tan\beta=ab=\frac{1}{6}$$

3　xyz 空間に3辺が$\mathrm{AB}=6$、$\mathrm{BC}=7$、$\mathrm{CA}=5$ の三角形 ABC がある。点 P が三角形 ABC の辺上を一周する。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　三角形 ABC の面積 S_1 を求めよ。

(2)　三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(3)　三角形 ABC と同一平面上にあり、点 P を中心とする半径 $t\ (0<t\leqq 1)$ の円を E とする。

(3－1)　三角形 ABC の内部で円 E が通過しない部分の面積 S_2 を t を用いて表せ。

(3－2)　円 E が通過する部分の面積 S_3 を t を用いて表せ。

(4)　点 P を中心とする半径 1 の球を F とする。球 F が通過する部分の体積 V を求めよ。

解説

(1)　ヘロンの公式より、$\dfrac{6+7+5}{2}=9$ から

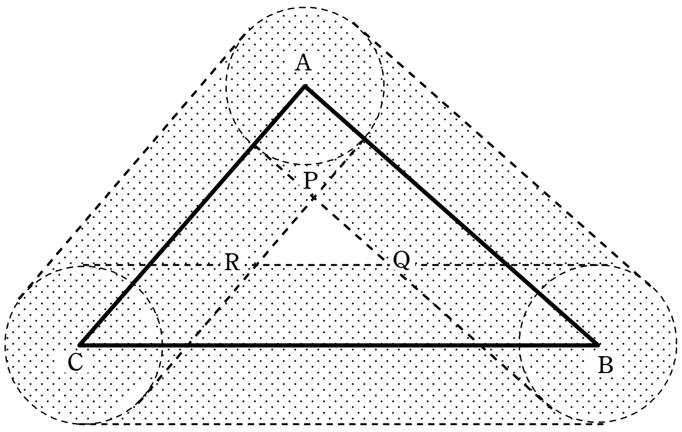
$$S_1=\sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)}=6\sqrt{6}$$

(2)　三角形 ABC の面積より

$$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot(6+7+5)\cdot r$$

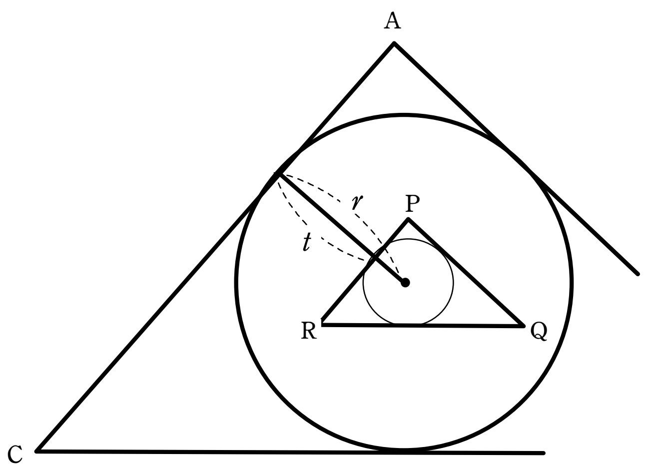
$$\therefore\quad r=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(3)　円 E の通過部分は、図の打点部分で、通過しない部分は図の△PQR である。



(3－1)

△PQR∽△ABC で、両方の内接円の中心は一致するので、△PQR と△ABC の相似比は、$r:r-t$ となる。



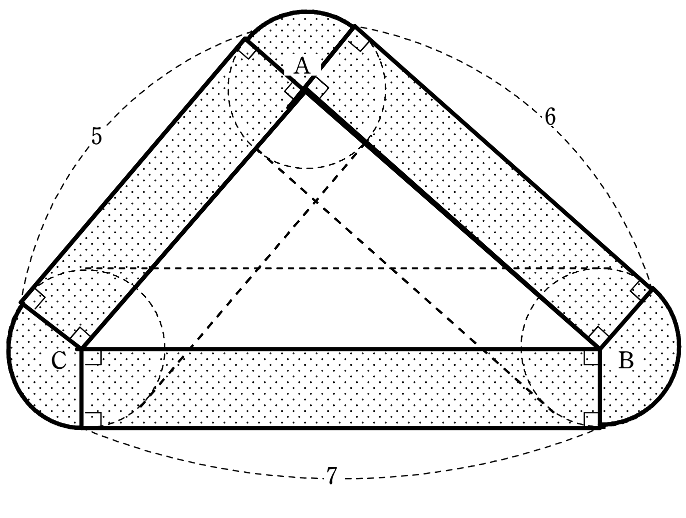
よって、$S_1:S_2=r^2:(r-t)^2$

$$\therefore\quad S_2=\frac{(r-t)^2}{r^2}\cdot S_1$$

$$=\frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-t\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}\cdot 6\sqrt{6}$$

$$=\frac{9\sqrt{6}}{4}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-t\right)^2$$

(3－2)



円 E が通過する△ABC の内部の面積は、S_1-S_2 で、

外部の面積は、$\pi t^2+(6+7+5)t=\pi t^2+18t$ ……(※)　より

求める面積 S_3 は

$$S_3=\left\{6\sqrt{6}-\frac{9\sqrt{6}}{4}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-t\right)^2\right\}+\pi t^2+18t$$

$$=\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)t^2+36t$$

参考　△ABC の外部にある扇形の部分の面積について（(※) について）

$\angle\mathrm{BAC}=A$ などとおくと

扇形の中心角の総和は、$(\pi-A)+(\pi-B)+(\pi-C)=3\pi-(A+B+C)$

$$=3\pi-\pi$$

$$=2\pi$$

となるので、扇形の面積の総和は、半径 t の円の面積と一致する。

(4)　球 F を $x^2+y^2+z^2\leqq 1$、A(0、0、0)、B(6、0、0) などと設定する。

球 F の中心 P が △ABC 上を動くときの、球 F が通過してできる立体を $z=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面は、球 F を $z=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ で切った断面（円）を、球の中心 P が △ABC 上を動くときの断面（円）が通過してできる図形と等しい。よって、$z=t$ での球の断面の半径は

$$x^2+y^2+t^2=1$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=1-t^2$$

より、$\sqrt{1-t^2}$ となる。

ゆえに、求める体積 V は、$S_3=S(t)$ とすると

$$V=\int_{-1}^{1}S\left(\sqrt{1-t^2}\right)dt$$

$$=2\int_0^1\left\{\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)(1-t^2)+36\sqrt{1-t^2}\right\}dt$$

$$=2\left\{\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1+36\cdot\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\frac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}$$

4 スペード、ハート、ダイヤ、クラブの各種類について、J、Q、K の 3 枚のカードがある。すなわちカードは全部で 12 枚ある。この中から無作為に 4 枚のカードを選ぶ。選ばれた 4 枚のカードについて、次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 4 枚のカードがスペード、ハート、ダイヤ、クラブのうちの 2 種類のみからなる確率を求めよ。

(2) 4 枚のカードがスペード、ハート、ダイヤ、クラブのうちの 3 種類のみからなる確率を求めよ。

(3) スペード、ハート、ダイヤ、クラブの 4 種類がそろう確率を求めよ。

(4) J、Q、K がすべて選ばれる確率を求めよ。

(5) スペード、ハート、ダイヤ、クラブの 4 種類がそろい、かつ、J、Q、K がすべて選ばれる確率を求めよ。

(解説)

(1) カードの種類の選び方は、${}_4C_2=6$ 通り

そのカードの種類を A、B として、A、B の枚数を $(A、B)$ とすると

$(A、B)=(1、3)、(2、2)、(3、1)$

となるので、求める確率は

$$\frac{6\times({}_3C_1\times{}_3C_3+{}_3C_2\times{}_3C_2+{}_3C_3\times{}_3C_1)}{{}_{12}C_4}=\frac{2}{11}$$

(2) カードの種類の選び方は、${}_4C_3=3$ 通り

そのカードの種類を A、B、C として、A、B、C の枚数を $(A、B、C)$ とすると

$(A、B、C)=(1、1、2)、(1、2、1)、(2、1、1)$

となるので、求める確率は

$$\frac{3\times({}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_2\times 3)}{{}_{12}C_4}=\frac{36}{55}$$

(3) カードの種類が 4 種類のとき、それぞれのカードの枚数は 1 枚ずつになるので

求める確率は

$$\frac{3^4}{{}_{12}C_4}=\frac{9}{55}$$

参考　(2) について、(3) を先に解いて余事象を利用してもよい。

$$\left(\begin{array}{c}\text{カードの種類が 3}\\\text{種類となる確率}\end{array}\right)=1-\left(\begin{array}{c}\text{カードの種類が 2}\\\text{種類となる確率}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{カードの種類が 4}\\\text{種類となる確率}\end{array}\right)$$

$$=1-\frac{2}{11}-\frac{9}{55}$$

$$=\frac{36}{55}$$

(4) J、Q、K の枚数を、(J、Q、K) とすると

(J、Q、K)$=(1、1、2)、(1、2、1)、(2、1、1)$

となるので、求める確率は

$$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_2\times 3}{{}_{12}C_4}=\frac{32}{55}$$

(5) (4) より、(J、Q、K)$=(1、1、2)、(1、2、1)、(2、1、1)$

(J、Q、K)$=(1、1、2)$ のとき

この 4 枚をスペード、ハート、ダイヤ、クラブの 4 種類への割り当て方の総数は

$$\frac{4!}{2!}=12 \text{ 通り}$$

(J、Q、K)$=(1、2、1)、(2、1、1)$ のときも同様より、求める確率は

$$\frac{12\times 3}{{}_{12}C_4}=\frac{4}{55}$$