◇２０２４年度　聖マリアンナ医科大学　前期

1 以下の(1)～(3)の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{カ}$ に当てはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　次の表は6人の生徒A～Fの数学、物理の小テストの得点と6人の平均点であるが、Dの数学の得点のみ表示されていない。

	A	B	C	D	E	F	平均
数学	8	8	6		8	10	7
物理	5	7	4	4	4	6	5

Dの数学の得点は $\boxed{ア}$ であり、この6人の数学の得点の分散を既約分数で答えると $\boxed{イ}$ である。また、この6人の数学と物理の得点の相関係数は $\dfrac{\boxed{ウ}}{38}$ である。

(2)　3次方程式 $x^3+\sqrt[3]{4}\,x+4=0$ の3つの解を α、β、γ とするとき

$$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{エ}$$

$$(10\sqrt[3]{2}-\alpha)(10\sqrt[3]{2}-\beta)(10\sqrt[3]{2}-\gamma)=\boxed{オ}$$

である。

(3)　a を実数とし、$(x-a)^2$ で割り切れる3次多項式 $f(x)$ を考える。$f(x)$ の係数がすべて実数で、x^3 の項の係数が1、$f(3)=3$、$f'(3)=1$ であるとき、a の値を求めると $a=\boxed{カ}$ である。

解説

(1)　生徒Dの得点を d とすると、平均より

$$8\times3+6+10+d=7\times6$$

$$\therefore\quad d=2$$

数学の得点の分散より

$$\frac{(8-7)^2\times3+(6-7)^2+(2-7)^2+(10-7)^2}{6}=\frac{19}{3}$$

物理の得点の分散より

$$\frac{(5-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2\times3+(6-5)^2}{6}=\frac{4}{3}$$

数学と物理の得点の共分散は

$$\frac{(8-7)(5-5)+(8-7)(7-5)+(6-7)(4-5)+(2-7)(4-5)+(8-7)(4-5)+(10-7)(6-5)}{6}=\frac{5}{3}$$

よって、6人の数学と物理の得点の相関係数は

$$\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{19}{3}}\times\sqrt{\frac{4}{3}}}=\frac{5\sqrt{19}}{38}$$

別解　分散に関して

数学の得点の分散より、$\dfrac{8^2\times3+6^2+10^2+2^2}{6}-7^2=\dfrac{19}{3}$

物理の得点の分散より、$\dfrac{5^2+7^2+4^2\times3+6^2}{6}-5^2=\dfrac{4}{3}$

(2)　解と係数の関係より、$\alpha+\beta+\gamma=0$

$x^3+\sqrt[3]{4}\,x+4=0$ の解が $x=\alpha$、β、γ より

$$x^3+\sqrt[3]{4}\,x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と変形できる。これに $x=10\sqrt[3]{2}$ を代入して

$$(10\sqrt[3]{2})^3+\sqrt[3]{4}\cdot(10\sqrt[3]{2})+4=(10\sqrt[3]{2}-\alpha)(10\sqrt[3]{2}-\beta)(10\sqrt[3]{2}-\gamma)$$

$$\therefore\quad (10\sqrt[3]{2}-\alpha)(10\sqrt[3]{2}-\beta)(10\sqrt[3]{2}-\gamma)=10^3\times2+10\times2+4$$

$$=2024$$

別解　解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\sqrt[3]{4}\\ \alpha\beta\gamma=-4\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(10\sqrt[3]{2}-\alpha)(10\sqrt[3]{2}-\beta)(10\sqrt[3]{2}-\gamma)&=(10\sqrt[3]{2})^3-(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(10\sqrt[3]{2})^2\\&\quad+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\cdot10\sqrt[3]{2}-\alpha\beta\gamma\\&=10^3\times2-0+10\times2+4\\&=2024\end{aligned}$$

(3)　x^3 の項の係数が1で、実数係数かつ $(x-a)^2$ で割り切れるので、

$$f(x)=(x-a)^2(x-p)$$

とおける。(p は実数)

$f(3)=3$ より

$$(3-a)^2(3-p)=3\ \cdots\cdots\ ①$$

$f'(3)=1$ より、$f'(x)=2(x-a)(x-p)+(x-a)^2$ から

$$2(3-a)(3-p)+(3-a)^2=1\cdots\cdots\ ②$$

$3-a=A$ とおくと、①、②から

$$\begin{cases}A^2(3-p)=3\ \cdots\cdots\ ③\\ 2A(3-p)+A^2=1\ \cdots\cdots\ ④\end{cases}$$

④の両辺を A 倍して

$$2A^2(3-p)+A^3=A$$

③を代入して

$$2\times3+A^3=A$$

$$\therefore\quad A^3-A+6=0$$

$$\therefore\quad (A+2)(A^2-2A+3)=0$$

A は実数より、$A=-2$

$$\therefore\quad 3-a=-2$$

$$\therefore\quad a=5$$

①より、$p=\dfrac{9}{4}$ で実数より適する。

よって、$a=5$

2　3 辺の長さが$AB=2$、$BC=3$、$AC=t\ (1<t<5)$ である△ABC の辺 AC 上に点 D をとる。また、$\angle ABD=\alpha$、$\angle CBD=\beta$、$\angle ADB=\theta$ とする。

以下の (1) ～ (3) の $\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$\sin\alpha=\sin\beta$ のとき、$AD=\boxed{\text{キ}}\,t$ であり、$2\sin\alpha=\sin\beta$ のとき、

$AD=\boxed{\text{ク}}\,t$ である。

(2)　$2\sin\alpha=\sin\beta$ とする。このとき、△ABD、△CBD に余弦定理をそれぞれ用いて、$\cos\theta$、$\cos(180^\circ-\theta)$ を BD と t を用いた式で表すと

$$\cos\theta=\frac{16BD^2+\boxed{\text{ケ}}}{8t\,BD}$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{16BD^2+\boxed{\text{コ}}}{24t\,BD}$$

である。

(3)　$2\sin\alpha=\sin\beta$ とし、$BD=s$ とおく。s を用いて t^2 を表すと $t^2=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{3}$ である。

また、$\cos\alpha$ をs を用いて表すと、

$$\cos\alpha=\frac{16s^2+\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}\,s}$$

である。$\cos\alpha$ を s の関数と考えて、その最小値を求めると $\boxed{\text{セ}}$ である。また、$\cos\alpha$ が最小値をとるときの s、t の値を求めると $s=\boxed{\text{ソ}}$、$t=\boxed{\text{タ}}$ である。

解説

(1)　・$\sin\alpha=\sin\beta$ のとき

$0<\alpha+\beta<180^\circ$ より、$\alpha=\beta$

よって、BD は∠ABD の二等分線となるので

$$\begin{aligned}AD:CD&=AB:BC\\&=2:3\end{aligned}$$

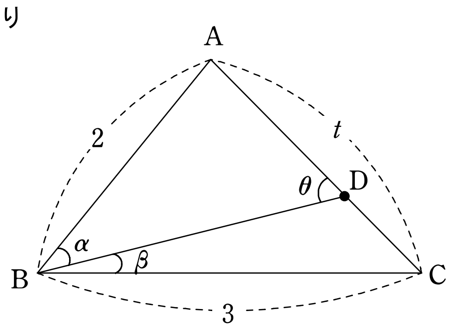
よって、$AD=\dfrac{2}{5}t$

・$2\sin\alpha=\sin\beta$ のとき

△ABD と△BCD のそれぞれ正弦定理より

$$\begin{cases}\dfrac{AD}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\theta}\\[2mm]\dfrac{CD}{\sin\beta}=\dfrac{3}{\sin(180^\circ-\theta)}\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}AD=\dfrac{2\sin\alpha}{\sin\theta}\\[2mm]CD=\dfrac{3\sin\beta}{\sin\theta}=\dfrac{6\sin\alpha}{\sin\theta}\end{cases}$$



よって、$AD:CD=1:3$ より、$AD=\dfrac{1}{4}t$ ……①

(2)　① のもとで △ABDで余弦定理を用いて

$$4=\left(\frac{1}{4}t\right)^2+BD^2-2\cdot\frac{1}{4}t\cdot BD\cdot\cos\theta$$

$$\therefore\quad\cos\theta=\frac{16BD^2+t^2-64}{8t\,BD}$$

① のもとで △CBDで余弦定理を用いて

$$9=\left(\frac{3}{4}t\right)^2+BD^2-2\cdot\frac{3}{4}t\cdot BD\cdot\cos(180^\circ-\theta)$$

$$\therefore\quad\cos(180^\circ-\theta)=\frac{16BD^2+9t^2-144}{24t\,BD}$$

(3)　$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ より

$$\frac{16BD^2+t^2-64}{8t\,BD}=-\frac{16BD^2+9t^2-144}{24t\,BD}$$

$$\therefore\quad\frac{16s^2+t^2-64}{8st}=-\frac{16s^2+9t^2-144}{24st}$$

$$\therefore\quad t^2=\frac{-16s^2+84}{3}\quad\cdots\cdots②$$

△ABD で余弦定理より

$$\left(\frac{1}{4}t\right)^2=4+BD^2-2\cdot2\cdot BD\cdot\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\cos\alpha&=\frac{s^2+2-\dfrac{t^2}{16}}{4s}\\&=\frac{s^2+2-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{-16s^2+84}{3}}{4s}\\&=\frac{16s^2+27}{48s}\quad(\because ②)\\&=\frac{1}{48}\left(16s+\frac{27}{s}\right)\end{aligned}$$

ここで、$s>0$、$\dfrac{27}{s}>0$より、相加相乗平均の大小関係から

$$\frac{1}{48}\left(16s+\frac{27}{s}\right)\geqq\frac{1}{48}\cdot2\sqrt{16s\cdot\frac{27}{s}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

等号は、$16s=\dfrac{27}{s}$ のとき

つまり、$s^2=\dfrac{27}{16}$

$s>0$ より、$s=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ のとき成立。

このとき、② と $t>0$より、$t=\sqrt{19}$

よって、$s=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$、$t=\sqrt{19}$ のとき、$\cos\alpha$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 a を正の実数、e を自然対数の底、$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とし、座標平面上の曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq a)$ を C_a で表す。C_a の長さは

$$L(a)=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

である。

また $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とおくとき、

$$f'(x)=g(x)、g'(x)=f(x)、\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$$

が成り立つ。以下の(1)、(2)、(4)の $\boxed{\text{チ}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に当てはまる適切な数、および(3)、(4)に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$\dfrac{g(a)}{L(a)}$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ である。

(2)　$L(a)=1$ のとき $f(a)$ の値と a の値を求めると $f(a)=\boxed{\text{ツ}}$、$a=\boxed{\text{テ}}$ である。

(3)　$L(a)=1$ のとき C_a 上に点 $\mathrm{P}_k(x_k、f(x_k))$ $(k=0、1、2、\cdots\cdots、n)$ をとり、C_a の長さを n 等分する。ただし、n は正の整数であり、$0=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n=a$ とする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$$

となることを示せ。

(4)　$t=g(u)$ という置換を用いて、定積分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$ を計算すると、その値は $\boxed{\text{ト}}$ である。また解答用紙の所定の欄に $\boxed{\text{ト}}$ の計算過程を記せ。

解説

$f'(x)=g(x)$ …… ①、$g'(x)=f(x)$ …… ②、$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$ …… ③ とおく

(1)
$$\begin{aligned}L(a)&=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\\&=\int_0^a\sqrt{1+\{g(x)\}^2}\,dx\quad(\because ①)\\&=\int_0^a\sqrt{\{f(x)\}^2}\,dx\quad(\because ③)\\&=\int_0^a f(x)dx\quad(\because f(x)\geqq 0)\\&=\Big[g(x)\Big]_0^a\quad(\because ②)\\&=g(a)-g(0)\\&=g(a)\quad(\because g(0)=0)\end{aligned}$$

よって、$\dfrac{g(a)}{L(a)}=1$

(2)　$L(a)=1$ より、(1)から $g(a)=1$

よって、$\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}=1$

$e^a=t$ とおくと $(t>0)$

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=1$$

$\therefore\ t^2-2t-1=0$

$\therefore\ t=1\pm\sqrt{2}$

$t>0$ より、$t=1+\sqrt{2}$

$\therefore\ e^a=1+\sqrt{2}$　…… ④

$\therefore\ a=\log(1+\sqrt{2})$

また、
$$\begin{aligned}f(a)&=\frac{e^a+e^{-a}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\quad(\because ④)\\&=\frac{1}{2}\{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)\}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3)　③より

$$f(x)^2=1+\{g(x)\}^2$$

$f(x)>0$ より、$f(x)=\sqrt{1+\{g(x)\}^2}$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{g(x_k)\}^2}$$

ここで、(1)から、$L(a)=g(a)$ より

$L(x_k)=g(x_k)$ ……⑤

また、$L(a)=1$ で P_k $(k=0、1、2、\cdots\cdots、n)$ が C_a を n 等分するので

$L(x_k)=\dfrac{k}{n}$ ……⑥

⑤、⑥から、$g(x_k)=\dfrac{k}{n}$ …… ⑦

よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\quad(\because ⑦)\\&=\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\end{aligned}$$

(4)　$t=g(u)$ とおくと、$dt=g'(u)du=f(u)du$　$(\because ②)$

$t:0\to1$ のとき、$u:0\to\log(1+\sqrt{2})$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt&=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\sqrt{1+\{g(u)\}^2}\cdot f(u)du\\&=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}f(u)\cdot f(u)du\quad(\because ③)\\&=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2du\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}(e^{2u}+2+e^{-2u})du\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{8}\left\{(1+\sqrt{2})^2+4\log(1+\sqrt{2})-\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2\right\}\quad(\because ④)\\&=\frac{1}{8}\{(1+\sqrt{2})^2+4\log(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)^2\}\\&=\frac{1}{8}\{2\sqrt{2}\cdot2+4\log(1+\sqrt{2})\}\\&=\frac{1}{2}\{2+\log(1+\sqrt{2})\}\end{aligned}$$

4 以下の (1) ～ (3) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　次の $\boxed{\text{ナ}}$、$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまる数を答えよ。
$4n+1$ ($n=1$、2、3、……) で表される自然数を考える。この形の数のうち、小さい方から5番目の合成数は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

(2)　a は自然数とする。a を用いて、次の文中にある b を表せ。
$p_n=an+1$ ($n=1$、2、3、……) とする。どのような自然数 m に対しても、
$k=bm+1$ とおくと $p_k=b(am+1)$ となる。
ここで b、$am+1$ はともに1より大きい自然数なので、p_k は合成数である。

(3)　c、d、e を自然数として $q_n=cn^2+dn+e$ ($n=1$、2、3、……) とする。c、d、e がどのような自然数であっても、q_n で表される数の中には合成数となるものがあることを示せ。

(解説)

(1)　$4n+1$ ($n=1$、2、3、……) で表される数を順に書き出すと

5、9、13、17、21、25、29、33、37、41、45、……

となる。よって
小さい方から5番目の素数は、37
小さい方から5番目の合成数は、45

(2)　$p_n=an+1$ ($n=1$、2、3、……) において、どのような自然数 m に対しても、
$k=bm+1$ とおくと $p_k=b(am+1)$ となるということなので

$$\begin{aligned}p_{bm+1}&=a(bm+1)+1\\&=abm+a+1\\&=b(am+1)-b+a+1\end{aligned}$$

よって、$b=a+1$ と定めると、合成数 $p_k=b(am+1)$ ($b\geqq 2$、$am+1\geqq 2$) となる。

(3)　任意の自然数 ℓ に対して、$j=f\ell+1$ を満たす ℓ において

$$\begin{aligned}q_j&=c(f\ell+1)^2+d(f\ell+1)+e\\&=cf^2\ell^2+2cf\ell+df\ell+c+d+e\\&=f(cf\ell^2+2c\ell+d\ell+1)-f+c+d+e\end{aligned}$$

よって、$f=a+b+c$ と定めると、
合成数 $q_j=f(cf\ell^2+2c\ell+d\ell+1)$ ($f\geqq 3$、$cf\ell^2+2c\ell+d\ell+1\geqq 5$) となる。
よって、$j=(c+d+e)\ell+1$ を満たす自然数 j に対して、q_j は合成数となる。