1　次の問い（問１、２）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１　曲線 $y=f(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$ の変曲点は

$$\left(\boxed{1}\boxed{2}、\boxed{3}\right)$$

である。この変曲点における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=\boxed{4}\boxed{5}x-\boxed{6}$$ である。

問２　k を正の定数とする。曲線 $y=\dfrac{2x^2-3x+k}{x}$ 上の $x>0$ の範囲にある点 $\mathrm{P}(x、y)$ において、$4x+5y$ の値の最小値が 20 となるとき、$k=\dfrac{\boxed{7}\boxed{8}}{\boxed{9}}$ であり、そのときの P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{10}}{\boxed{11}}、\boxed{12}\right)$ である。

（解説）

問１　
$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x-1)(x+3)\\&=x^3+3x^2-x-3\quad より\\f'(x)&=3x^2+6x-1\\f''(x)&=6x+6\\&=6(x+1)\end{aligned}$$

$x=-1$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化するので、$x=-1$ で変曲点となる。

よって、変曲点の座標は、$(-1、0)$

この点における接線は、$f'(-1)=-4$ より

$$y=-4(x+1)=-4x-4$$

問２　
$$\begin{aligned}4x+5y&=4x+5\cdot\frac{2x^2-3x+k}{x}\\&=14x+\frac{5k}{x}-15\end{aligned}$$

$14x>0$、$\dfrac{5k}{x}>0$ より、相加相乗平均の大小関係から

$$\begin{aligned}14x+\frac{5k}{x}-15&\geqq 2\sqrt{14x\cdot\frac{5k}{x}}-15\\&=2\sqrt{70k}-15\end{aligned}$$

等号は、$14x=\dfrac{5k}{x}$ のとき

つまり、$x^2=\dfrac{5k}{14}$

$x>0$、$k>0$ より、$x=\sqrt{\dfrac{5k}{14}}$ のとき、等号は成立する。

よって、$4x+5y$ の最小値が 20 より

$$2\sqrt{70k}-15=20$$

$$\therefore\ \sqrt{70k}=\frac{35}{2}$$

$$\therefore\ k=\frac{35}{8}$$

このとき、$x=\sqrt{\dfrac{5k}{14}}=\dfrac{5}{4}$

よって、$k=\dfrac{35}{8}$、$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{4}、3\right)$

別解　$y=\dfrac{2x^2-3x+k}{x}\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x、y)$ において、$4x+5y$ の最小値が 20 となるのは、$y=\dfrac{2x^2-3x+k}{x}\ (x>0)$ と $4x+5y=20$ が接するときである。

よって、$4x+5\cdot\dfrac{2x^2-3x+k}{x}=20$

$$\therefore\ 14x^2-35x+5k=0\ \cdots\cdots ①$$

判別式を D とすると

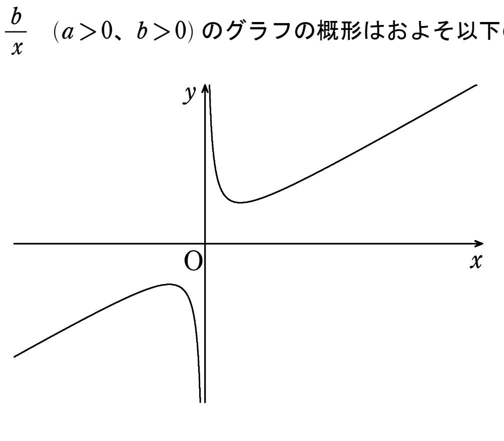
$$D=35^2-4\cdot14\cdot5k=0$$

$$\therefore\ k=\frac{35}{8}$$

このとき、① より、接点の x 座標は $x=\dfrac{5}{4}$

よって、P の座標は $\left(\dfrac{5}{4}、3\right)$

参考　$y=ax+\dfrac{b}{x}\quad(a>0、b>0)$ のグラフの概形はおよそ以下のようになる。



2　次の文章を読み、後の問い（問１～３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

△ABC において、BC＝8、CA＝4、AB＝6 であるとする。

問１　∠A の大きさを A とすると、$\sin A=\dfrac{\sqrt{\boxed{13}\boxed{14}}}{\boxed{15}}$ であり、三角形の面積 S は $S=\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}\boxed{18}}$ である。

問２　3 辺 BC、CA、AB を 3：2 に内分する点をそれぞれ L、M、N とし、線分 AL と線分 BM、線分 BM と線分 CN、線分 CN と線分 AL の交点をそれぞれ P、Q、R とするとき

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PR}:\mathrm{RL}=1:\frac{\boxed{19}}{\boxed{20}}:\frac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$$

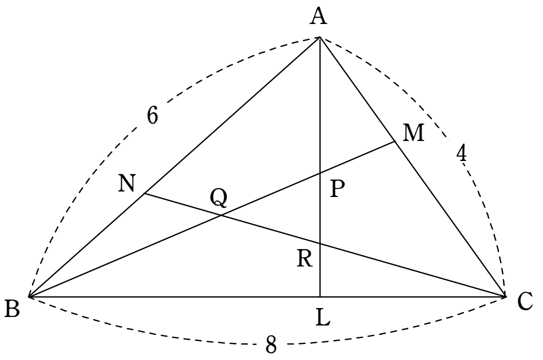
である。

問３　△PQR と△ABC は、それぞれ三角形の面積を表す。

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{\boxed{23}}{\boxed{24}\boxed{25}}\triangle\mathrm{ABC}$$

である。

（解説）



問１　△ABC で余弦定理より

$$8^2=6^2+4^2-2\cdot8\cdot4\cdot\cos A$$

$$\therefore\ \cos A=-\frac{1}{4}$$

$0<A<\pi$ より、$\sin A=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって、
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\\&=3\sqrt{15}\end{aligned}$$

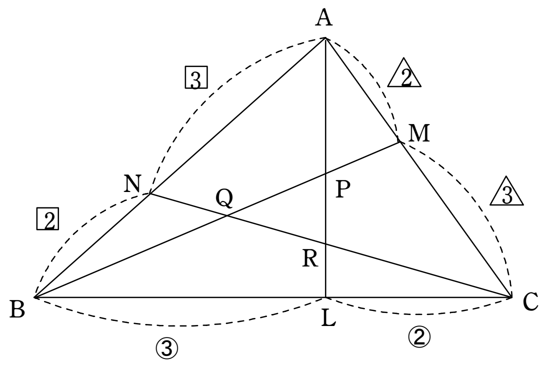
問２　メネラウスの定理より

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BL}}\cdot\dfrac{\mathrm{LP}}{\mathrm{PA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}}=1\\[2mm]\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CL}}\cdot\dfrac{\mathrm{LR}}{\mathrm{RA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}}=1\end{cases}$$

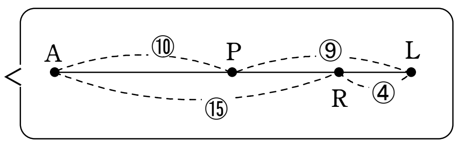
$$\therefore\ \begin{cases}\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{LP}}{\mathrm{PA}}\cdot\dfrac{2}{3}=1\\[2mm]\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{LR}}{\mathrm{RA}}\cdot\dfrac{3}{2}=1\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}9\mathrm{AP}=10\mathrm{PL}\\4\mathrm{AR}=15\mathrm{RL}\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\mathrm{AP}:\mathrm{PL}=10:9\\\mathrm{AR}:\mathrm{RL}=15:4\end{cases}$$

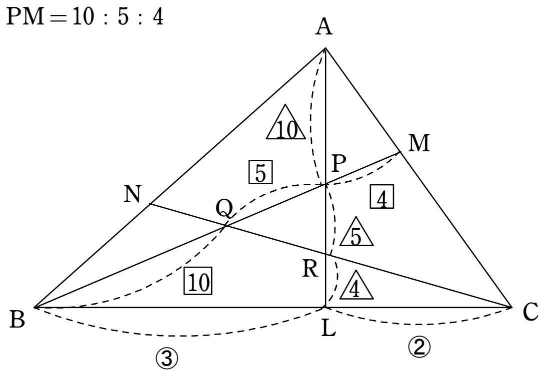


よって、
$$\begin{aligned}\mathrm{AP}:\mathrm{PR}:\mathrm{RL}&=10:5:4\\&=1:\frac{1}{2}:\frac{2}{5}\end{aligned}$$



問３　問２と同様にして、BQ：QP：PM＝10：5：4

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR}&=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}}\triangle\mathrm{PBR}\\&=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{AL}}\triangle\mathrm{ABL}\\&=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{AL}}\cdot\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{5}{15}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{1}{19}\triangle\mathrm{ABC}\end{aligned}$$



3　次の文章を読み、後の問い（問１、２）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

関数 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$、…… を次のように定める。

$$f_1(x)=0$$

$$f_n(x)=\frac{x^2}{n(n+2)}+\int_1^2 f_{n-1}(t)dt \quad (n \geqq 2 \text{ のとき})$$

問１　自然数 n に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_1^2 f_n(x)dx$$

と定める。このとき、$a_1=\boxed{26}$ であり、$n \geqq 2$ については漸化式

$$a_n=\frac{\boxed{27}}{\boxed{28}}\left(\frac{\boxed{29}}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\boxed{30}\,a_{n-1}$$

が成り立つ。

問２　数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{\boxed{31}}{\boxed{32}}\left(\frac{\boxed{33}}{\boxed{34}}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

である。

（解説）

問１　$a_n=\int_1^2 f_n(x)dx$ ………①

$n=1$ のとき、① より

$$a_1=\int_1^2 f_1(x)dx$$

$f_1(x)=0$ より

$$a_1=0$$

また、① より、$n \geqq 2$ のとき

$$f_n(x)=\frac{x^2}{n(n+2)}+a_{n-1}$$

① に代入して

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_1^2\left\{\frac{x^2}{n(n+2)}+a_{n-1}\right\}dx\\
&=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{n(n+2)}+ta_{n-1}\right]_1^2\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{n(n+2)}+a_{n-1}\\
&=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+a_{n-1}\\
&=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+1\cdot a_{n-1}
\end{aligned}$$

問２　問１より

$$a_{n+1}-a_n=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right) \quad (n \geqq 1)$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{7}{6}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\
&=\frac{7}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\
&=\frac{7}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\
&=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{7}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \quad (n=1 \text{ のときも成立})
\end{aligned}$$

4　次の文章を読み、後の問い（問１～３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

さいころを１つ投げ、以下のルールに従って出た目の数を合計していく。目の合計が７になったとき、さいころを投げるのをやめる。目の数の合計が７を超えた場合は、そのときに出た目の数は合計に加えず、目の数の合計が７になるまでさいころを投げ続ける。さいころを、目の数を加えなかった回も含めて n 回投げたとき、目の数の合計が７になる確率を $P(n)$ とする。

問１　$P(2)=\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である。

問２　$P(3)=\dfrac{\boxed{37}}{\boxed{38}\boxed{39}}$ である。

問３　さいころを４回投げたところで、ルールに従って投げるのをやめた。このとき、目の数を加えなかった回が１回以上ある確率は $\dfrac{\boxed{40}\boxed{41}}{\boxed{42}\boxed{43}}$ である。

（解説）

問１　さいころを２回投げるとき、目の出方は 36 通り。

このとき、目の和が７となるのは

(1、6)、(2、5)、(3、4)、(4、3)、(5、2)、(6、1)

よって、$P(2)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

問２　１回目で目の和が７になることはなく、２回目以降は $\dfrac{1}{6}$ の確率で目の和を７にすることができるので、

$$P(3)=1\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

別解　さいころを3回投げるとき、目の出方は 216 通り。

３つの目の和が７となる組合せは

(1、1、5)、(1、2、4)、(1、3、3)、(2、2、3)

である。順番も考慮すると、３つの目の和が７となるの

$$3!+\frac{3!}{2!}\times 3=15 \text{ 通り}$$

また、２回目に７を超えて、３回目に目の和が７となるのは

１回目	2	3	4	5	6
２回目	6	5、6	4、5、6	3、4、5、6	2、3、4、5、6
３回目	5	4	3	2	1
通り	1	2	3	4	5

表より、$1+2+3;4=15$ 通り

よって、$P(3)=\dfrac{15+15}{216}=\dfrac{30}{216}=\dfrac{5}{36}$

問３　さいころを４回投げるとき、目の出方は 6^4 通り。

さいころを４回投げて投げるのをやめる確率は

$$\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{25}{6^3}$$

４つの目の和が７となる組合せは

(1、1、1、4)、(1、1、2、3)、(1、2、2、2)

である。順番も考慮すると、４つの目の和が７となるのは

$$\frac{4!}{3!}\times 2+\frac{4!}{2!}=20 \text{ 通り}$$

よって、さいころを４回投げて、目の和が１度も７を超えずに丁度４回目に７となる確率は $\dfrac{20}{6^4}$ より、求める確率は

$$\frac{\dfrac{25}{6^3}-\dfrac{20}{6^4}}{\dfrac{25}{6^3}}=\frac{13}{15}$$