1　次の問い（問１、２）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１　関数 $f(x)=(1-x)e^{1-x}$ は $x=\boxed{1}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{2}\boxed{3}}{e^{\boxed{4}}}$ をとり、

$y=f(x)$ の変曲点は $\left(\boxed{5}、\dfrac{\boxed{6}\boxed{7}}{e^{\boxed{8}}}\right)$ である。

問２　座標平面上の３つの曲線

$C_1：x^2-x+y^2=2\ (y\geqq 0)$

$C_2：x=\cos\theta、y=\sin\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$C_3：y=\sqrt{-x^2+2x}$

で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{9}\boxed{10}\pi-\boxed{11}\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{13}\boxed{14}}$ である。

（解説）

問１　$f(x)=(1-x)e^{1-x}$ より

$f'(x)=(x-2)e^{1-x}$

$f''(x)=(3-x)e^{1-x}$

より、増減表は以下のようになる。

x		2		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗	$-\dfrac{2}{e^2}$	↗

よって、$x=2$ で極小値 $-\dfrac{1}{e}$

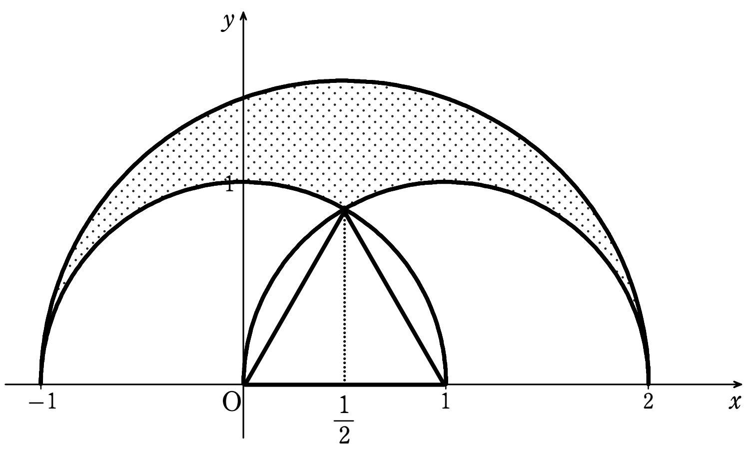
変曲点の座標は $\left(3、-\dfrac{2}{e^2}\right)$

問２　$C_1：\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y\fallingdotseq 2=\dfrac{9}{4}\ (y\geqq 0)$

$C_2：x^2+y^2=1\ (y\geqq 0)$

$C_3：(x-1)^2+y^2=1\ (y\geqq 0)$

となるので、求める部分の面積は、図の打点部分である。



原点と $(1、0)$、$\left(\dfrac{1}{2}、\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で作られる三角形が、１辺が１の正三角形ということを考慮して、求める部分の面積を S とおくと

$$S=\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}-2\times\left(\pi\cdot 1^2\times\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\cdot 1^1\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{11\pi-6\sqrt{3}}{24}$$

2　次の文章を読み、後の問い（問１〜３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$$f(x)=x^3-\frac{4}{3}x$$

とする。

問１　曲線 $y=f(x)$ と y 軸の交点Ａにおけるこの曲線の法線の傾きは $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$ である。

問２　$t\fallingdotseq 0$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t、f(t))$ における $y=f(x)$ の接線 ℓ がこの曲線と交わる点を $\mathrm{Q}(q、f(q))$ とする。ただし、ＱはＰと異なる。このとき、

$q=\boxed{17}\boxed{18}t$ である。

問３　Ｑにおける $y=f(x)$ の接線 ℓ' が ℓ と直交するとき、$t=\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{19}\boxed{20}}}{\boxed{21}}$

である。

（解説）

問１　$f(x)=x^3-\dfrac{4}{3}x$ と y 軸との交点Ａは $(0、0)$ で、$f'(x)=3x^2-\dfrac{4}{3}$ より

Ａにおける法線の傾きは、$-\dfrac{1}{f(0)}=\dfrac{3}{4}$

問２　y 軸平行な接線は存在しないので、接線を $y=mx+n$ とおくと

$y=f(x)$ と $y=mx+n$ は $x=t$ で接し、$x=q$ で交わるので

$f(x)=mx+n$

$\therefore\ x^3-\left(m+\dfrac{4}{3}\right)x=0$

より、これが、$x=t、t、q$ を解にもつことになる。

よって、解と係数の関係より

$t+t+q=0$

$\therefore\ q=-2t$

（別解）　Ｐにおける $y=f(x)$ の接線は、y 軸平行にはならないので

$y=\left(3t^2-\dfrac{4}{3}\right)(x-t)+t^3-\dfrac{4}{3}t$

$\therefore\ y=\left(3t^2-\dfrac{4}{3}\right)x-2t^3$

これが、$y=f(x)$ と交わるので

$x^3-\dfrac{4}{3}x=\left(3t^2-\dfrac{4}{3}\right)x-2t^3$

$\therefore\ x^3-3t^2x+2t^3=0$

$\therefore\ (x-t)^2(x+2t)=0$

$\therefore\ x=t、-2t$

よって、$q=-2t$

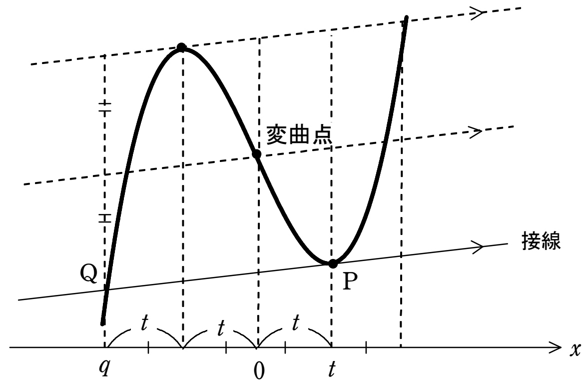
（別解）　３次関数は変曲点に関して点対称で、下図のように等間隔になっている。

$f''(x)=6x$ より

$x=0$ の前後で符号変化するので、$(0、f(0))$ が変曲点となる。

よって、３次関数のグラフの性質より

交点Ｑの x 座標 q は、図より、$q=-2t$



問３　$\ell'\perp\ell$ より

$f'(t)\times f'(-2t)=-1$

$\therefore\ \left(3t^2-\dfrac{4}{3}\right)\times\left(12t^2-\dfrac{4}{3}\right)=-1$

$\therefore\ 36t^4-20t^2+\dfrac{25}{9}=0$

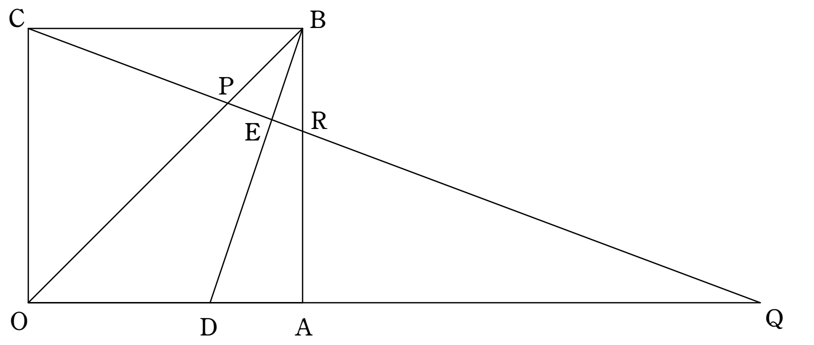
$\therefore\ \left(6t^2-\dfrac{5}{3}\right)^2=0$

$\therefore\ t^2=\dfrac{5}{18}$

$\therefore\ t=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$

3 次の文章を読み、後の問い（問１～４）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

図のような OA＝3、OC＝$2\sqrt{2}$ である長方形 OABC がある。線分 OA を 2 : 1 に内分する点を D、線分 DB を 2 : 1 に内分する点を E とする。OB と CE の交点を P とする。



問１　$\overrightarrow{OE}$ は

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{\boxed{22}}\left(\boxed{23}\,\overrightarrow{OB}+\boxed{24}\,\overrightarrow{OD}\right)$$

であり、$\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}\,\boxed{27}}\overrightarrow{OB}$$

である。

問２　CP の延長と OA の延長が交わる点を Q とすると、Q は OA を $\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$: 1 に外分する。

問３　PQ と AB の交点を R とする。このとき、$\overrightarrow{CP}$ と $\overrightarrow{DB}$ の内積 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DB}=\boxed{30}$ なので、

$$\angle BER=\frac{\boxed{31}}{\boxed{32}}\pi$$

である。

問４　△AQR と△ABD の面積比は

$$\frac{\triangle AQR}{\triangle ABD}=\frac{\boxed{33}\,\boxed{34}}{\boxed{35}}$$

である。

(解説)

問１　線分 DB を 2 : 1 に内分する点が E より、$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$

OA∥BC より

△EDQ ∽ △EBC で相似比は 2 : 1 より、AQ＝5

よって、メネラウスの定理 より

$$\frac{OQ}{QD}\cdot\frac{DE}{EB}\cdot\frac{BP}{PO}=1$$

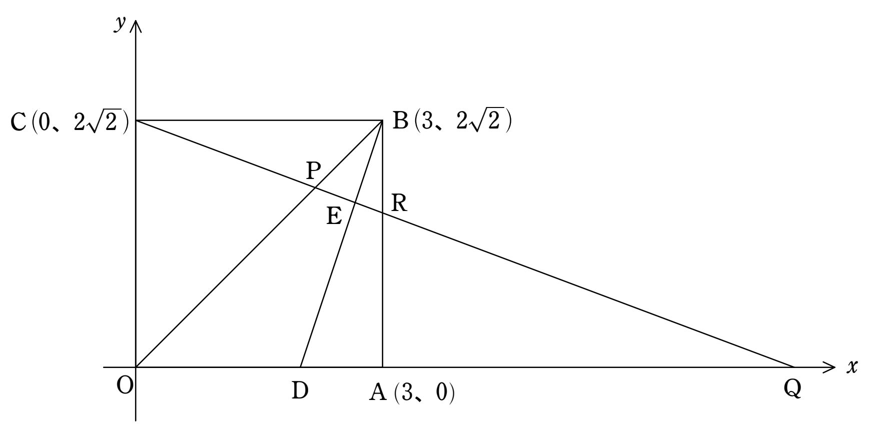
$$\therefore\quad \frac{8}{6}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{BP}{PO}=1$$

$$\therefore\quad \frac{BP}{PO}=\frac{3}{8}$$

よって、OP : PB＝8 : 3 より、$\overrightarrow{OP}=\dfrac{8}{11}\overrightarrow{OB}$

別解　座標の利用

O (0、0)、A (3、0)、B(3、$2\sqrt{2}$)、C (0、$2\sqrt{2}$) と座標を設定すると



線分 DB を 2 : 1 に内分する点が E より、E$\left(\dfrac{8}{3}、\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

よって、直線 CP : $y=\dfrac{\frac{4}{3}\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\frac{8}{3}-0}x+2\sqrt{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+2\sqrt{2}$

直線 OB : $y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$ との交点 P は

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}x=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{24}{11}$$

よって、P$\left(\dfrac{24}{11}、\dfrac{16\sqrt{2}}{11}\right)$ となる。

これより、OP : PB＝$\dfrac{24}{11}$: $3-\dfrac{24}{11}$＝8 : 3 より、$\overrightarrow{OP}=\dfrac{8}{11}\overrightarrow{OB}$

別解　ベクトルの利用（$\overrightarrow{OP}$ を 2 通りで表す）

（ｉ）O、P、B は同一直線上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=k\overrightarrow{OB}\quad (k\text{ は実数})\\&=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\\&=k\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC}\quad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

（ⅱ）CP : PE＝$t : 1-t\ (0<t<1)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=t\overrightarrow{OE}+(1-t)\overrightarrow{OC}\\&=\frac{t}{3}(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+(1-t)\overrightarrow{OC}\\&=\frac{t}{3}(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+(1-t)\overrightarrow{OC}\\&=\frac{t}{3}\left\{2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right\}+(1-t)\overrightarrow{OC}\\&=\frac{8}{9}t\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{t}{3}\right)\overrightarrow{OC}\quad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ は一次独立より、①、② から

$$\begin{cases}k=\dfrac{8}{9}t\\ k=1-\dfrac{t}{3}\end{cases}\text{ より、}\begin{cases}k=\dfrac{8}{11}\\ t=\dfrac{9}{11}\end{cases}$$

よって、$\overrightarrow{OP}=\dfrac{8}{11}\overrightarrow{OB}$

問２　OA∥BC より

△EDQ ∽ △EBC で相似比は 2 : 1 より、AQ＝5

よって、Q は OA を 8 : 5 に外分する点となるので、$\dfrac{8}{5}$: 1

別解　座標の利用

直線 CP : $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+2\sqrt{2}$ と x 軸の交点が Q より

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}x+2\sqrt{2}=0$$

$$\therefore\quad x=8$$

よって、Q (8、0) となる。

これより、Q は OA を 8 : 5 に外分する点となるので、$\dfrac{8}{5}$: 1

別解　ベクトルの利用（$\overrightarrow{OQ}$ を 2 通りで表す）

（ｉ）O、A、Q は同一直線上より

$\overrightarrow{OQ}=\ell\overrightarrow{OA}$（$\ell$ は実数）　………③

（ⅱ）C、P、Q は同一直線上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CP}\quad (s\text{ は実数})\\&=\overrightarrow{OC}+s(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})\\&=s\overrightarrow{OP}+(1-s)\overrightarrow{OC}\\&=\frac{8}{11}s\overrightarrow{OB}+(1-s)\overrightarrow{AB}\\&=\frac{8}{11}s\overrightarrow{OB}+(1-s)(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=-(1-s)\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{3}{11}s\right)\overrightarrow{OB}\quad\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は一次独立より、③、④ から

$$\begin{cases}\ell=-(1-s)\\ 0=1-\dfrac{3}{11}s\end{cases}\text{ より、}\begin{cases}\ell=\dfrac{8}{3}\\ s=\dfrac{11}{3}\end{cases}$$

よって、$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{8}{3}\overrightarrow{OA}$ より、OQ : OA＝8 : 3

これより、Q は OA を 8 : 5 に外分する点となるので、$\dfrac{8}{5}$: 1

問3　$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}$

$=\frac{8}{11}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$=\frac{8}{11}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{OC}$

$=\frac{8}{11}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OC}$

$=\frac{8}{11}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{11}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

OA⊥OC より、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

よって

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\frac{8}{11}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{11}\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{3}{11}|\overrightarrow{OC}|^2$

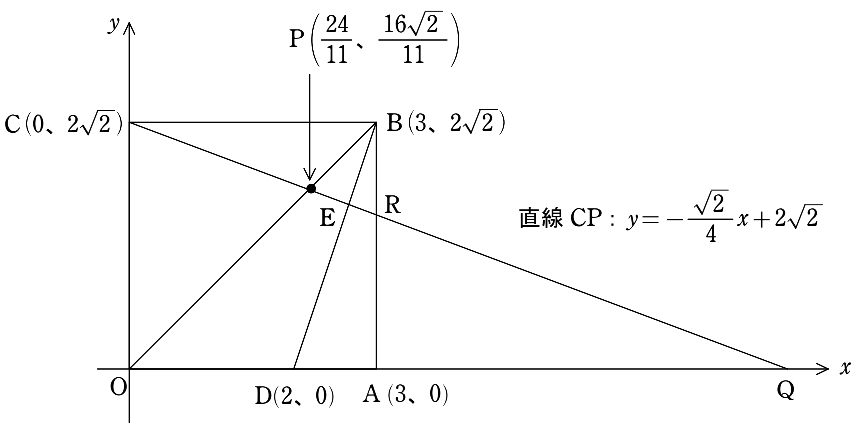
$=\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{3}\cdot3^2-\frac{3}{11}\cdot(2\sqrt{2})^2$

$=\frac{24}{11}-\frac{24}{11}$

$=0$

よって、$\angle BER=\frac{1}{2}\pi$

別解　座標の利用



$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}\frac{24}{11}-0\\ \frac{16\sqrt{2}}{11}-2\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{6}{11}\begin{pmatrix}4\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$

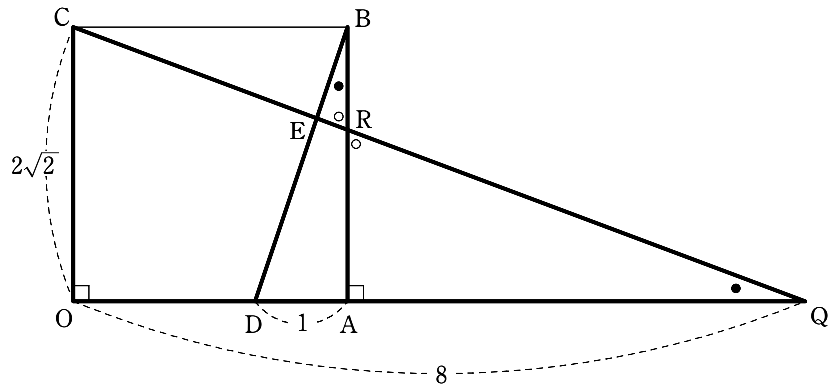
線分 OA を 2 : 1 に内分する点が D より、D(2、0)

よって、$\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}3-2\\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

これより、$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{6}{11}\begin{pmatrix}4\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}=0$

よって、$\angle BER=\frac{1}{2}\pi$

別解　相似の利用



DA : AB$=1:2\sqrt{2}$

CO : OQ$=2\sqrt{2}:8=1:2\sqrt{2}$

また、$\angle COQ=\angle DAB=\frac{\pi}{2}$ より

△COQ ∽△DAB

よって、∠OQC＝∠ABD

また、∠QRA＝∠BRE より、△AQR ∽△EBR となるので

$\angle BEQ=\angle QAR=\frac{\pi}{2}$

よって、$\angle BER=\frac{1}{2}\pi$

問4　△AQR と△ABD はともに直角三角形で、△QAR ∽ △QOCで相似比が

5 : 8 より、$AR=\frac{5}{8}OC=\frac{5}{8}AB$ より

$\frac{\triangle AQR}{\triangle ABD}=\frac{AQ\times AR}{AB\times AD}$

$=\frac{\frac{5}{3}OA\times\frac{5}{8}AB}{AB\times\frac{1}{3}OA}$

$=\frac{25}{8}$

4 次の文章を読み、後の問い（問１～４）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

赤色と黄色と無色透明なセロハンがこの順に５：３：２の割合で袋の中に詰められている。A、B、C、D の４人がこの中から無作為にセロハンを２枚ずつ取り出す。袋の中のセロハンはよく混ぜられており、取り出すときに何色のセロハンか判別できない。また、袋の中のセロハンは十分に多いので、セロハンを取り出した後も、３種類のセロハンの割合は変化しないと考えてよい。

取り出した２枚のセロハンを重ねて色を観察すると、赤色同士のセロハンが重なる場合と、赤色と無色のセロハンが重なる場合はともに赤色に見える。同様に、黄色のセロハン同士が重なる場合と、黄色と無色のセロハンが重なる場合はともに黄色に見える。赤色と黄色のセロハンが重なる場合はだいだい色に見える。

問１　A が取り出した２枚のセロハンを重ねると赤色に見える確率は $\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}\boxed{38}}$ である。

問２　A が取り出した２枚のセロハンを重ねると赤色に見えた。このとき、取り出したセロハンが両方とも赤色である確率は $\dfrac{\boxed{39}}{\boxed{40}}$ である。

問３　B が取り出した２枚のセロハンを重ねると赤色に見えた。この２枚のセロハンから１枚を無作為に選んだとき、無色のセロハンが選ばれる確率は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}$ である。

問４　C が取り出した２枚のセロハンを重ねると赤色に見え、D が取り出した２枚のセロハンを重ねると黄色に見えた。この後、C が取り出したセロハンから１枚を無作為に選び、D が取り出したセロハンからも１枚を無作為に選んで、この２枚を重ねた。このとき、だいだい色に見える確率は $\dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}}$ である。

解説

問１　A が赤色を２枚、または赤色と無色を１枚ずつ取り出すときより、求める確率は

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)=\frac{9}{20}$$

問２　問１より、求める確率は

$$\frac{\left(\frac{5}{10}\right)^2}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$

問３　２枚のセロハンが赤色に見える確率は、問１と同様で、$\dfrac{9}{20}$

２枚のセロハンを重ねると赤色に見え、かつこの２枚のセロハンから１枚を無作為に選んだとき、無色のセロハンが選ばれる確率は

$${}_2C_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

よって、求める確率は

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{20}}=\frac{2}{9}$$

問４　C が取り出した２枚のセロハンが赤色に見える確率は、問１と同様で、$\dfrac{9}{20}$

D が取り出した２枚のセロハンが黄色に見える確率は

$$\left(\frac{3}{10}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)=\frac{21}{100}$$

よって、C が取り出した２枚のセロハンが赤色に見えかつ、D が取り出した２枚のセロハンが黄色に見える確率は

$$\frac{9}{20}\times\frac{21}{100}=\frac{9\times21}{2000}$$

C が取り出した２枚のセロハンを重ねると赤色に見え、かつこの２枚のセロハンから１枚を無作為に選んだとき、赤色のセロハンが選ばれる確率は

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2\times1+{}_2C_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$$

D が取り出した２枚のセロハンを重ねると黄色に見え、かつこの２枚のセロハンから１枚を無作為に選んだとき、黄色のセロハンが選ばれる確率は

$$\left(\frac{3}{10}\right)^2\times1+{}_2C_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$$

よって、C、D がそれぞれ取り出した２枚のセロハンから１枚ずつ無作為に選んだ２枚のセロハンがだいだい色に見える確率は

$$\frac{7}{20}\times\frac{3}{20}$$

よって、求める確率は

$$\frac{\frac{7}{20}\times\frac{3}{20}}{\frac{9\times21}{2000}}=\frac{5}{9}$$