1

$$a_1=2、a_{n+1}=\frac{2a_n+5}{a_n+2}\quad(n=1、2、3、\cdots\cdots)$$

で定義される数列$\{a_n\}$について、次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し、$a_n \geqq 2$ であることを示せ。

(2) ある自然数 n に対して、$a_n<\sqrt{5}$ ならば $a_{n+1}>\sqrt{5}$ 、また、$a_n>\sqrt{5}$ ならば $a_{n+1}<\sqrt{5}$ であることを示せ。

(3) すべての自然数 n に対し、

$$|a_{n+1}-\sqrt{5}| \leqq \frac{\sqrt{5}-2}{4}|a_n-\sqrt{5}|$$

であることを示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解説

(1) $a_n \geqq 2$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

（ⅰ） $n=1$ のとき

$a_1=2 \geqq 2$ より成立

（ⅱ） $n=k$ のとき、$a_k \geqq 2$ が成り立つと仮定すると

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=\frac{2a_k+5}{a_k+2}$$
$$=2+\frac{1}{a_k+2}$$

ここで、仮定より、$\frac{1}{a_k+2}>0$ となるので、$a_{k+1} \geqq 2$ となる。

よって、$n=k+1$ のとき成立。

（ⅰ）、（ⅱ）より、すべての自然数 n に対して、$a_n \geqq 2$ は成立する。

(2) 与式より

$$a_{n+1}-\sqrt{5}=\frac{2a_n+5}{a_n+2}-\sqrt{5}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{5})a_n+\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{a_n+2}$$
$$=\frac{2-\sqrt{5}}{a_n+2}(a_n-\sqrt{5})$$

(1)から、$\frac{2-\sqrt{5}}{a_n+2}<0$ より

$a_n<\sqrt{5}$ のとき、右辺は正より、 $a_{n+1}>\sqrt{5}$

また、$a_n>\sqrt{5}$ のとき、右辺は負より、 $a_{n+1}<\sqrt{5}$ となる。

以上より、題意を示された。

(3) (2)より

$$|a_{n+1}-\sqrt{5}|=\left|\frac{2-\sqrt{5}}{a_n+2}(a_n-\sqrt{5})\right|$$
$$=\frac{\sqrt{5}-2}{a_n+2}|a_n-\sqrt{5}|\quad(\because\ a_n \geqq 2)$$
$$\leqq \frac{\sqrt{5}-2}{4}|a_n-\sqrt{5}|\quad(\because\ a_n \geqq 2)$$

よって、題意を示された。

(4) (3)より

$$|a_n-\sqrt{5}| \leqq \frac{\sqrt{5}-2}{4}|a_{n-1}-\sqrt{5}|$$

以下、n をずらして代入していくと

$$0<|a_n-\sqrt{5}| \leqq \frac{\sqrt{5}-2}{4}|a_{n-1}-\sqrt{5}| \leqq \left(\frac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^2|a_{n-2}-\sqrt{5}| \leqq \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \leqq \left(\frac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^{n-1}|a_1-\sqrt{5}|$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^{n-1}|a_1-\sqrt{5}|=0$ より

はさみうちの原理から、$\lim_{n\to\infty}|a_n-\sqrt{5}|=0$

よって、$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{5}$

2 座標空間に点 A$(2,\ 1,\ 3)$と点 B$(1,\ 3,\ 4)$があり、また zx 平面上を動く点 P と yz 平面上を動く点 Q がある。次の問いに答えよ。ただし設問 (1) を結果のみ解答せよ。

(1)　線分の長さの和 AP＋BP の最小値を求めよ。
また、和が最小になるときの点 P の座標を求めよ。

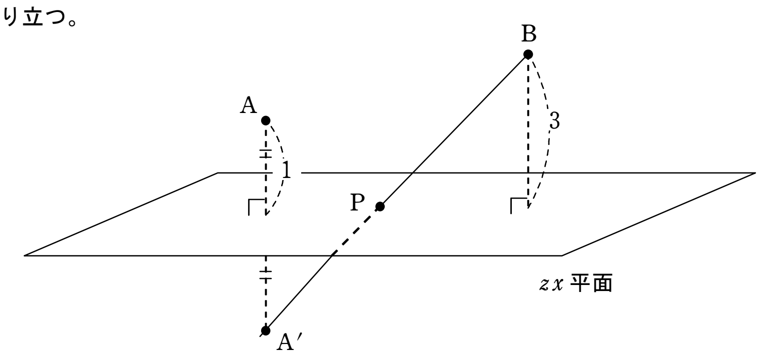
(2)　3 つの線分の長さの和 AP＋PQ＋BQ の和の最小値を求めよ。
また、和が最小になるときの点 P、点 Q の座標を求めよ。

(解説)

(1)　点A と点B は zx 平面に対して同じ側にあるので、zx 平面に対して点Aと対称な点を A$'(2,\ -1,\ 3)$ とすると

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{A'P}+\mathrm{BP}\geqq \mathrm{A'B}$$

が成り立つ。



よって、AP＋BP が最小となるのは、直線A$'$B と平面 zx 平面の交点が点Pのときである。このとき、点P は点 A$'$ と点 B を $1:3$ に内分する点になっているので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7}{4}\\0\\\frac{13}{4}\end{pmatrix}$$

よって、点 P は $\left(\frac{7}{4},\ 0,\ \frac{13}{4}\right)$ となる。

最小値はA$'$B の長さと等しいので、$\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2+(4-3)^2}=3\sqrt{2}$ となる。

(別解)　点 P の求め方

直線A$'$B は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\quad (t \text{ は実数})$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-t+2\\4t-1\\t+3\end{pmatrix}$$

zx 平面との交点より

$y=0$

$\therefore\ 4t-1=0$

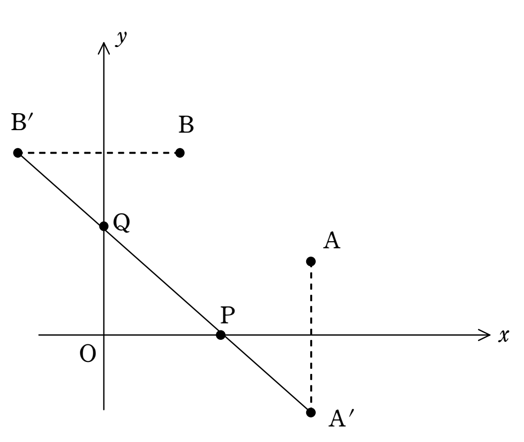
$\therefore\ t=\frac{1}{4}$

よって、点P の座標は $\left(\frac{7}{4},\ 0,\ \frac{13}{4}\right)$ となる。

(2)　点A と点B は yz 平面に対して同じ側にあるので、yz 平面に対して点Bと対称な点を B$'(-1,\ 3,\ 4)$ とすると

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB'}\geqq \mathrm{A'B'}$$

が成り立つ。



（z 軸の正方向から見た図）

よって、AP＋PQ＋QB が最小となるのは、直線A$'$B$'$ と平面 zx 平面の交点が点 P、平面 yz の交点が Q のときである。

直線A$'$B$'$ は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\quad (t \text{ は実数})$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3t+2\\4t-1\\t+3\end{pmatrix}$$

zx 平面との交点より

$y=0$

$\therefore\ 4t-1=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{4}$

よって、点P の座標は $\left(\frac{5}{4},\ 0,\ \frac{13}{4}\right)$ となる。

yz 平面との交点より

$x=0$

$\therefore\ -3t+2=0$

$\therefore\ t=\frac{2}{3}$

よって、点Q の座標は $\left(0,\ \frac{5}{3},\ \frac{11}{3}\right)$ となる。

最小値はA$'$B$'$ の長さと等しいので、$\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{26}$ となる。

3 e は自然対数の底とし、a、b は実数定数とする。座標平面内の曲線

$$C:\ y=f(x)=\frac{e^{x-a}+e^{-x+a}}{2}+b$$

および直線

$$L:\ y=g(x)=x$$

について、次の問いに答えよ。

(1)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。極限 $\lim_{x\to\infty}h(x)$ と $\lim_{x\to-\infty}h(x)$ を求めよ。

　必要ならば、$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$　が成り立つことを用いてよい。

(2)　C と L が接するための a、b の条件を求めよ。

(3)　C と L が相違なる 2 点で交わるための a、b の条件を求めよ。

解説

(1)　$h(x)=\frac{e^{x-a}+e^{-x+a}}{2}+b-x$ より

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}e^{x-a}\cdot\left(\frac{1+e^{-2x+2a}}{2}+\frac{b-x}{e^x}\cdot e^a\right)=\infty$$

$x=-u$ とおくと、$x\to-\infty$ のとき、$u\to\infty$ となるので

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{e^{-u-a}+e^{u+a}}{2}+b+u\right)=\infty$$

(2)　C と L が $x=t$ で接する条件は

$$\begin{cases}f(t)=g(t)\\ f'(t)=g'(t)\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\dfrac{e^{t-a}+e^{-t+a}}{2}+b=t\ \cdots\cdots\ ①\\[2mm] \dfrac{e^{t-a}-e^{-t+a}}{2}=1\ \cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

$e^{t-a}=s$ とおくと $(s>0)$、② より

$$\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)=1$$

$\therefore\ s^2-2s-1=0$

$\therefore\ s=1\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ s=1+\sqrt{2}$　$(\because\ s>0)$

$\therefore\ e^{t-a}=1+\sqrt{2}$ ……… ③

$\therefore\ t-a=\log(1+\sqrt{2})$

$\therefore\ t=a+\log(1+\sqrt{2})$ ……… ④

①、③、④より

$$\frac{1}{2}\left\{(1+\sqrt{2})+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right\}+b=a+\log(1+\sqrt{2})$$

$\therefore\ a-b=\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})$

(3)　C と L が相違なる 2 点で交わる。

つまり、$h(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって、$y=h(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わればよいので

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)$$
$$=\frac{e^{x-a}-e^{-x+a}}{2}-1$$

ここで、$f''(x)=f(x)>0$ より、$y=f'(x)$は単調増加である。

また、(2) から、$h'(x)=0$ の解は t より、$y=f'(x)$ と $y=1$ は $(t,\ 1)$ のみで交わる。

以上より、$h(x)$ の増減表は

x	$-\infty$		t		∞
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$h(t)$	↗	

となるので、(1) を考慮して求める条件は

$h(t)<0$

$\therefore\ f(t)-g(t)<0$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left\{(1+\sqrt{2})+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right\}+b<a+\log(1+\sqrt{2})$$

$\therefore\ a-b>\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})$

4 xy 平面上で点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は、

$$x=r,\ y=\sin\theta\cos^2 r+\sin\theta\cos r+1$$

を満たしながら動くものとする。r、θ は実数として、次の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ かつ $0\leqq r\leqq\pi$ を満たしながら r が変化するとき、

　点 P の描く曲線を求め図示せよ。

(2)　$\frac{\pi}{4}\leqq r\leqq\frac{\pi}{2}$ かつ $\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ を満たしながら r、θ が変化するとき、点 P が動く

　領域の面積を求めよ。

解説

(1)　$x=r$、$\theta=\frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$y=\sin\frac{\pi}{2}\cos^2 x+\sin\frac{\pi}{2}\cos x+1\quad(0\leqq x\leqq\pi)$$
$$=\cos^2 x+\cos x+1$$

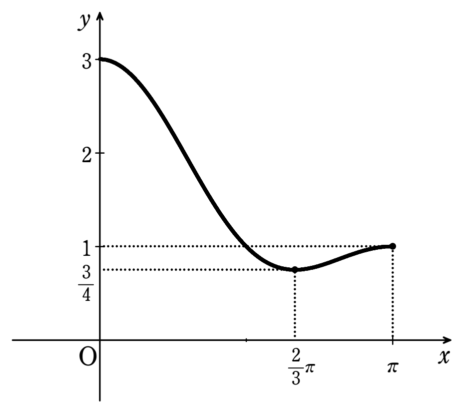
よって

$$y'=-2\cos x\sin x-\sin x$$
$$=-\sin x(2\cos x+1)$$

より、$0\leqq x\leqq\pi$ における増減表は以下のようになる。

x	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
y'		$-$	0	$+$	
y	3	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1

よって、点 P が描く曲線は以下のようになる。



(2)　$x=r$ を代入すると

$$y=\sin\theta\cos^2 x+\sin\theta\cos x+1\quad\left(\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}、\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\theta(\cos^2 x+\cos x)+1$$

ここで、$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より、$\cos x\geqq 0$ となるので、$\cos^2 x+\cos x\geqq 0$

よって、$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ より

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1\leqq y\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1$$

これは、$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ におけるすべての x で成立するので、求める面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1\right\}-\left\{\frac{1}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1\right\}\right]dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x+\cos x)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos x\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{16}\cdot(\pi+6-4\sqrt{2})$$