1 以下の問いにて答えよ。
設問(1)ⅰ）と(2)ⅰ）は、結果のみを解答せよ。設問(1)ⅱ）と(2)ⅱ）は、途中の式、考え方も記述せよ。

(1) 30 人の学生がテストを受け、2 人が満点を取ったとする。この 30 人から n 人を選んだとき、満点を取った学生が含まれている確率を $P(n)$ とする。ただし、n は 28 人以下の自然数とする。

ⅰ） $P(5)$ を求めよ。

ⅱ） $P(n) \geqq \frac{1}{2}$ を満たすような n のうち最小のものを求めよ。

(2) 複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1+2i)$、$\mathrm{B}(5)$、$\mathrm{C}(z)$ がある。ただし、i は虚数単位である。

ⅰ） 三角形 ABC が正三角形となるように z を定めよ。ただし、反時計回りの順に点 A、点 B、点 C が並んでいるものとする。

ⅱ） 点 C が $\dfrac{z-1-2i}{z-5}+\dfrac{\overline{z}-1+2i}{\overline{z}-5}=0$ を満たしながら動くとき、$|z|$ の最大値を求めよ。

解説

(1)

ⅰ） 30 人から 5 人を選んだとき、満点を取った学生が含まれていない確率は

$$\frac{{}_{28}C_5}{{}_{30}C_5}=\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24}{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26}=\frac{20}{29}$$

よって、5 人選んだとき、少なくとも 1 人満点である確率 $P(5)$ は

$$P(5)=1-\frac{20}{29}=\frac{9}{29}$$

ⅱ） ⅰ）と同様に考えて、30 人から n 人を選んだとき、満点を取った学生が含まれている確率 $P(n)$ は

$$P(n)=1-\frac{{}_{28}C_n}{{}_{30}C_n}$$
$$=1-\frac{28!}{n!(28-n)!}\times\frac{n!(30-n)!}{30!}$$
$$=1-\frac{(30-n)(29-n)}{30\cdot29}$$

よって、$P(n)\geqq\frac{1}{2}$ より

$$1-\frac{(30-n)(29-n)}{30\cdot29}\geqq\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad \frac{(30-n)(29-n)}{30\cdot29}\leqq\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad (30-n)(29-n)\leqq435$$

ここで、左辺を $f(n)$ とおくと、$1\leqq n\leqq28$ で $f(n)$ は単調減少であるので

$$f(8)=462\geqq435$$
$$f(9)=420\leqq435$$

となるので、$P(n)\geqq\frac{1}{2}$ を満たす最小の n は $n=9$ である。

(2) $\alpha=1+2i$、$\beta=5$ とする。

ⅰ） $\mathrm{B}(\beta)$ を $\mathrm{A}(\alpha)$ の周りに反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ 回転した点が $\mathrm{C}(z)$ より

$$z=(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+\alpha$$
$$\therefore\quad z=(4-2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1+2i$$
$$=(3-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$$

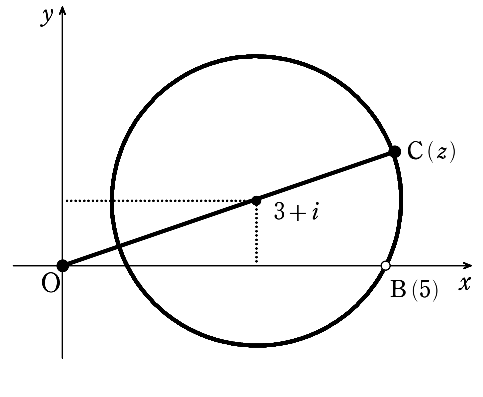
ⅱ） $\dfrac{z-1-2i}{z-5}+\dfrac{\overline{z}-1+2i}{\overline{z}-5}=0$ より

$$\therefore\quad (\overline{z}-5)(z-1-2i)+(z-5)(\overline{z}-1+2i)=0\quad(z\neq5)$$
$$\therefore\quad z\overline{z}-(3-i)z-(3+i)\overline{z}+5=0$$
$$\therefore\quad \{z-(3+i)\}\{\overline{z}-(3-i)\}=5$$
$$\therefore\quad \{z-(3+i)\}\{\overline{z-(3+i)}\}=5$$
$$\therefore\quad |z-(3+i)|=\sqrt{5}$$

これより、$\mathrm{C}(z)$ は点 $(3+i)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円上を動く。（ただし、B(5) は除く）

よって、$|z|$ は原点から $\mathrm{C}(z)$ までの距離より、$|z|$ が最大となるのは、下図のように O と円の中心を結ぶ直線と円が交わる点が $\mathrm{C}(z)$ のときである。

よって、$|z|$ の最大値は $\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{5}=\sqrt{10}+\sqrt{5}$



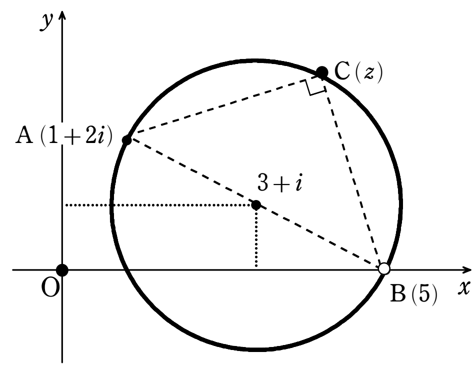
別解 $\dfrac{z-1-2i}{z-5}+\dfrac{\overline{z}-1+2i}{\overline{z}-5}=0$ より

$$\frac{z-1-2i}{z-5}+\overline{\left(\frac{z-1-2i}{z-5}\right)}=0$$

これより、$\dfrac{z-1-2i}{z-5}$ が純虚数 または $z=1+2i\ (z=\alpha)$ となる。

よって、$\dfrac{z-1-2i}{z-5}=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数より、AC⊥BC となるので

C(z) はAB を直径とする円周上を動く。（ただし、B(5) は除く）



以下略

2　O を原点とする座標平面上において、O を極、x 軸の正の方向を始線とする極座標を定め、極方程式 $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ で表される曲線を C とする。$0<\theta<\pi$ とし、極座標が $(r,\ \theta)$ で表される C 上の点を P、点 P における C の接線を ℓ、ℓ と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ Q、R とするとき、以下の問いに答えよ。

(1)　ℓ の傾きを θ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{OQR}$ を θ を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OR}^2}$ を求めよ。

解説

$r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ で、$0<\theta<\pi$ より、$r>0$

また、O が極より、$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta\ (y\geqq 0)$、$r^2=x^2+y^2$ となる。

$r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ より

$$r(1-\cos\theta)=2$$

$$\therefore\ r=2+r\cos\theta$$

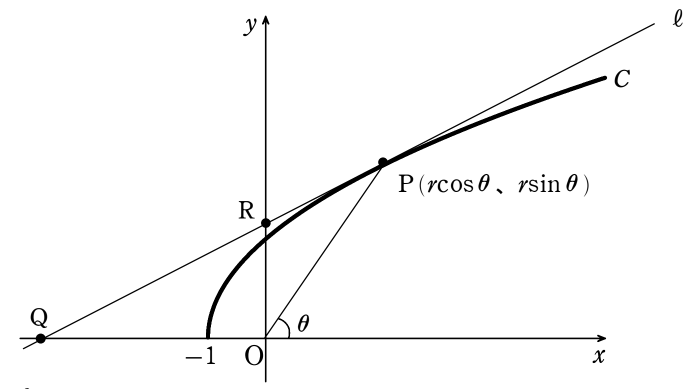
$$\therefore\ r=2+x$$

$$\therefore\ r^2=(2+x)^2\quad(x>-2)$$

$$\therefore\ x^2+y^2=4+4x+x^2$$

$$\therefore\ x=\frac{y^2}{4}-1\quad(x>-2\ を満たす)$$

よって、図のようになる。



(1)　$x=\dfrac{y^2}{4}-1$ より

$$dx=\frac{2y}{4}\,dy$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$$

P$(r\cos\theta$、$r\sin\theta)$ における接線の傾きより

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{r\sin\theta}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\frac{2}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

(2)　ℓ の傾きが $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ より

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\tan\frac{\theta}{2}$$

よって、ℓ は x 軸の正方向とのなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ となる。

これより、$\angle\mathrm{OQR}=\dfrac{\theta}{2}$

(3)　$\angle\mathrm{OQR}=\dfrac{\theta}{2}$、OP と x 軸の正方向とのなす角は θ より、$\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\theta}{2}$

よって、$\triangle$OPQ は二等辺三角形となるので、$\mathrm{OQ}=r$

また、$\triangle$OQR は直角三角形より、$\mathrm{OR}=r\tan\dfrac{\theta}{2}$

よって、$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OR}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{r}{r^2\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{r\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

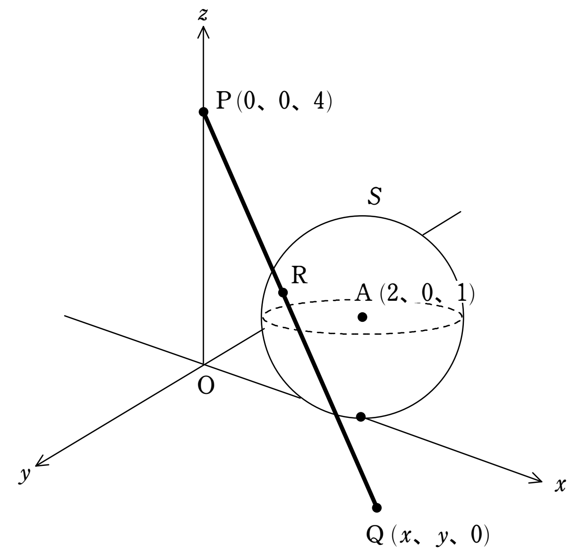
$$=1$$

3　O を原点とする座標空間に点 A$(2,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面を S がある。2 点 P$(0,\ 0,\ 4)$、Q$(x,\ y,\ 0)$ を通る直線が S と点 R で接しているとき、以下の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{APR}=\theta$ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。また、内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(2)　xy 平面上で Q 全体が描く図形の方程式を求めよ。

解説



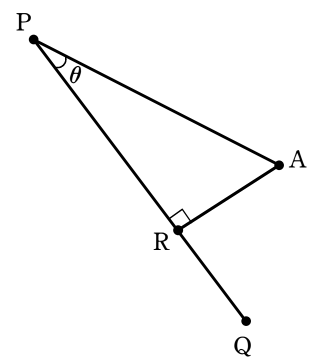
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(2,\ 0,\ -3)$ より、$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

AR は半径より、$\mathrm{AR}=1$

よって、$\mathrm{PR}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{AR}^2}$

$$=\sqrt{13-1}$$

$$=2\sqrt{3}$$



以上より、$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PA}}$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$=\frac{2\sqrt{39}}{13}$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos\theta$

$$=\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{39}}{13}$$

$$=12$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(2,\ 0,\ -3)$、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(x,\ y,\ -4)$ で

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta$ より

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\-4\end{pmatrix}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{x^2+y^2+(-4)^2}\cdot\frac{2\sqrt{39}}{13}$$

$$\therefore\ x+6=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+y^2+16}$$

$x\geqq-6$ のもとで、2 乗して

$$(x+6)^2=3(x^2+y^2+16)$$

$$\therefore\ 2x^2+3y^2-12x+12=0$$

$$\therefore\ 2(x-3)^2+3y^2=6$$

$$\therefore\ \frac{(x-3)^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\quad(x\geqq-6\ を満たす)$$

別解　球面 $S:(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$

Q を$(X,\ Y,\ 0)$として、直線 PQを表すと

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ (t\ は実数)$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X\\Y\\-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}tX\\tY\\4-4t\end{pmatrix}$$

球面 S と直線 PQ は接するので

$$(tX-2)^2+(tY)^2+(3-4t)^2=1$$

$$\therefore\ (X^2+Y^2+16)t^2-4(X+6)t+12=0$$

実数 t がただ一つ存在すればよいので、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4(X+6)^2-(X^2+Y^2+16)\cdot 12=0$$

$$\therefore\ (X+6)^2-3(X^2+Y^2+16)=0$$

$$\therefore\ 2X^2+3Y^2-12X+12=0$$

$$\therefore\ \frac{(X-3)^2}{3}+\frac{Y^2}{2}=1$$

よって、求める図形の方程式は $\dfrac{(x-3)^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

4 n を自然数とする。$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

(1) I_1、I_2 を求めよ。

(2) $I_n<\dfrac{\pi}{4(n+1)}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\tan x)^n(1-\tan^2 x)dx$ を求めよ。

解説

(1) $$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log 2$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=1-\frac{\pi}{4}$$

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で、$y=\tan x$ は下凸のグラフになるので、$(0,\ 0)$ と $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$ を結ぶ直線である $y=\dfrac{4}{\pi}x$ と $y=\tan x$ のグラフの上下関係は、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において、$\tan x\leqq\dfrac{4}{\pi}x$ となるので、$0\leqq\tan^n x\leqq\left(\dfrac{4}{\pi}x\right)^n$ が成り立つ。

よって、$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n dx$$

$$=\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{\pi}{4(n+1)}$$

したがって、$(0<)\ I_n<\dfrac{\pi}{4(n+1)}$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\tan x)^n(1-\tan^2 x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\tan^n x-\tan^{n+2}x)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(I_n-I_{n+2})$$

ここで、$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(I_k-I_{k+2})=-(I_1-I_3)+(I_2-I_4)-(I_3-I_5)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(I_{n-1}-I_n)+(-1)^n(I_n-I_{n+2})$$

$$=-I_1+I_2+(-1)^{n-1}(-I_n)+(-1)^n(-I_{n+2})$$

となる。(2) より、$0<I_n<\dfrac{\pi}{4(n+1)}$ となるので、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4(n+1)}=0$ より、はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となる。

よって、$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\tan x)^n(1-\tan^2 x)dx=-I_1+I_2$$

$$=-\frac{1}{2}\log 2+1-\frac{\pi}{4}$$