**1**　$a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ とおく。以下の問いに答えなさい。

(1)　$a+\dfrac{2}{a}$ の値を求めなさい。

(2)　$a$ は無理数であることを証明しなさい。ただし、必要なら$\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ が無理数であることを用いてよい。

解説

(1)
$$\begin{aligned} a+\frac{2}{a} &= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

(2)　$a$ を 0 以外の有理数と仮定すると、$a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ より

$$a-\sqrt{5}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ (a-\sqrt{5})^2=3$$

$$\therefore\ a^2-2\sqrt{5}\,a+5=3$$

$$\therefore\ 2\sqrt{5}\,a=a^2+2$$

$$\therefore\ \sqrt{5}=\frac{a^2+2}{2a}$$

$a$ は有理数より、右辺は有理数だが左辺は無理数となり矛盾する。

よって、$a$ は有理数ではない。つまり、$a$ は無理数である。

**2** 円 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$ について以下の問いに答えよ。

(1)　原点Oから円 $C$ に接線を引くとき、傾きが小さい方の接線を $\ell$ とし、その接点をAとする。$\ell$ の方程式とAの座標を求めなさい。

(2)　直線 $y=\dfrac{3}{2}x$ と円 $C$ との交点のうち、$x$ 座標が大きい方を点Bとする。Bと(1)のAおよび原点Oとで作られる三角形OABの面積を求めなさい。

(解説)

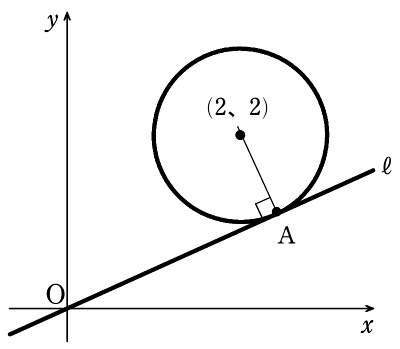
(1)　$\ell$ は $y$ 軸平行な直線にはならないので、$y=mx$ とおくと、円 $C$ と接するので

$$\frac{|2m-2|}{\sqrt{1+m^2}}=1$$

$\therefore\ |2m-2|^2=1+m^2$

$\therefore\ 3m^2-8m+3=0$

$\therefore\ m=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$




傾きが小さい方が $\ell$ より、$\ell:y=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}x$

円の中心をP、$\ell$ の方向ベクトルを $\vec{\ell}=(3,\ 4-\sqrt{7})$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|^2}\vec{\ell}\quad\cdots\cdots(※)$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4-\sqrt{7}\end{pmatrix}}{3^2+(4-\sqrt{7})^2}\begin{pmatrix}3\\4-\sqrt{7}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{7-\sqrt{7}}{4(4-\sqrt{7})}\begin{pmatrix}3\\4-\sqrt{7}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{(7-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}\\ \dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}\\ \dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\end{pmatrix}$$

よって、$\mathrm{A}\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}、\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\right)$

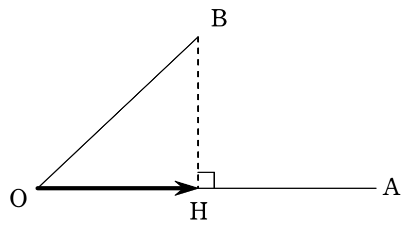
(参考)　(※)について

・正射影ベクトル

右図において、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルといい

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と表せる。




(別解)　円の中心をPとすると、$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$\ell$ の方向ベクトルを $(3,\ 4-\sqrt{7})$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の方向ベクトルは $(4-\sqrt{7},\ -3)$ となる。

また、$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\sqrt{(4-\sqrt{7})^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{8(4-\sqrt{7})}$

$=\sqrt{4(8-2\sqrt{7})}$

$=\sqrt{4(\sqrt{7}-1)^2}$

$=2(\sqrt{7}-1)$

となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}\cdot\begin{pmatrix}4-\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2(\sqrt{7}-1)}\cdot\begin{pmatrix}4-\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{7}+1}{12}\cdot\begin{pmatrix}4-\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}\\ -\dfrac{\sqrt{7}+1}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}\\ \dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\end{pmatrix}$$

よって、$\mathrm{A}\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}、\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\right)$

(別解)　接点Aは、$\ell$ と円 $C$ の中心を通り $\ell$ に垂直な直線との交点より

$\ell$ と $y=-\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}(x-2)+2=-\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}x+\dfrac{14+2\sqrt{7}}{3}$ を連立して

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3}x=-\frac{4+\sqrt{7}}{3}x+\frac{14+2\sqrt{7}}{3}$$

$\therefore\ (4-\sqrt{7})x=-(4+\sqrt{7})x+14+2\sqrt{7}$

$\therefore\ 8x=14+2\sqrt{7}$

$\therefore\ x=\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}$

$\ell$ より、$y=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\cdot\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}=\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}$

よって、$\mathrm{A}\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}、\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\right)$

(別解)　$\ell$ と円 $C$ を連立して

$(x-2)^2+(mx-2)^2=1$

$\therefore\ (m^2+1)x^2-4(m+1)x+7=0$

$\ell$ と円 $C$ が接するので、この方程式は重解をもつ。

よって、$x=-\dfrac{-4(m+1)}{2(m^2+1)}$

$$=\frac{2(m+1)}{m^2+1}$$

$$=\frac{2\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}+1\right)}{\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^2+1}$$

$$=\frac{3(7-\sqrt{7})}{4(4-\sqrt{7})}$$

$$=\frac{7+\sqrt{7}}{4}$$

$\ell$ より、$y=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\cdot\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}=\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}$

よって、$\mathrm{A}\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}、\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\right)$

(2)　$y=\dfrac{3}{2}x$ と円 $C$ を連立して

$$(x-2)^2+\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2=1$$

$\therefore\ 13x^2-40x+28=0$

$\therefore\ (13x-14)(x-2)=0$

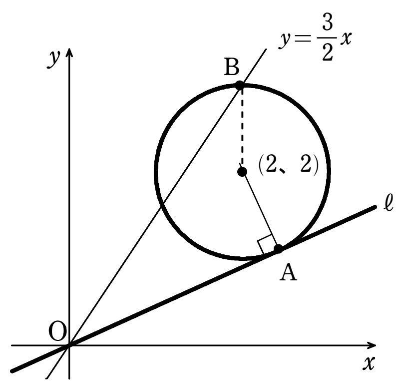
$\therefore\ x=\dfrac{14}{13}、2$

$x$ 座標が大きいほうがBより、B(2、3)となる

よって

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left|3\cdot\frac{7+\sqrt{7}}{4}-2\cdot\frac{7-\sqrt{7}}{4}\right|$$

$$=\frac{7+5\sqrt{7}}{8}$$




(参考)　円 $C$ の中心が(2、2)で半径が1より、$y=\dfrac{3}{2}x$ は円 $C$ の中心の真上である(2、3)を通ることが計算しなくても分かる。

**3**　関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$、$g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ を考える。以下の問いに答えなさい。

(1)　座標平面上の２つの曲線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ で囲まれる部分の面積を求めなさい。

(2)　$\alpha>1$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上に点 $P_1(\alpha、f(\alpha))$ を、曲線 $y=g(x)$ 上に点 $P_2(\alpha、g(\alpha))$ をとる。$P_1$ における $y=f(x)$ の接線を $\ell_1$、$P_2$ における $y=g(x)$ の接線 $\ell_2$ とするとき、$\ell_1$ および $\ell_2$ をそれぞれ求めなさい。

(3)　$\alpha>1$ として、(2) の $\ell_1$、$\ell_2$ の交点の $x$ 座標が $-\dfrac{11}{3}$ であるとき、$\alpha$ の値を求めて、$\ell_1$、$\ell_2$ および $x=\alpha$ で囲まれる部分の面積を求めなさい。

解説

(1)　$f(-x)=f(x)$、$g(-1)=g(x)$ より、$y=f(x)$、$y=g(x)$ ともに偶関数である。

$y=f(x)$、$y=g(x)$ の交点より

$$f(x)=g(x)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\therefore\quad x^2=1$$

$$\therefore\quad x=\pm1$$

よって、$-1\leqq x\leqq 1$ において

$$f(x)-g(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\geqq 0 \text{ より}$$

$-1\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq g(x)$ となる。

したがって、求める面積を $S$ とすると

$$S=2\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$$

$$=2\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx$$

$x=\tan\theta$ とおくと、$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$x:0\to1$ のとき、$\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$　となるので

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan^2\theta)d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=2\Big[2\theta-\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

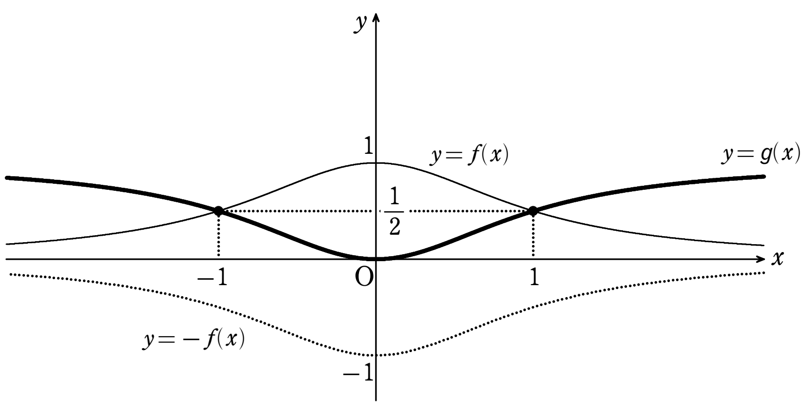
$$=\pi-2$$

参考　$g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}=\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}=1-f(x)$

よって、$y=g(x)$ は、$y=f(x)$ を $x$ 軸に関して対称移動したあと、$y$ 軸方向に $+1$ 平行移動したグラフになる。

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ より、$x\geqq0$ で $f'(x)\leqq0$ より、$x\geqq0$ で $y=f(x)$ は単調減少。

また、$f(0)=1$、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ となるので、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は以下のようになる。




これより、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $y=\dfrac{1}{2}$ 対称と分かる。

(2)　$f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ より、$P_1(\alpha、f(\alpha))$ における接線 $\ell_1$ は

$$y=-\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha)+\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\therefore\quad y=-\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}x+\frac{1+3\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$$

$g'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ より、$P_2(\alpha、g(\alpha))$ における接線 $\ell_2$ は

$$y=\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha)+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$\therefore\quad y=\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}x+\frac{\alpha^4-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$$

(3)　$\ell_1$ と $\ell_2$ の交点より

$$-\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}x+\frac{1+3\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}=\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}x+\frac{\alpha^4-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$$

$$\therefore\quad -2\alpha x+1+3\alpha^2=2\alpha x+\alpha^4-\alpha^2$$

$$\therefore\quad \alpha^4-4\alpha^2+4\alpha x-1=0$$

$x=-\dfrac{11}{3}$ より

$$\alpha^4-4\alpha^2-\frac{44}{3}\alpha-1=0$$

$$\therefore\quad 3\alpha^4-12\alpha^2-44\alpha-3=0$$

$$\therefore\quad (\alpha-3)(3\alpha^3+9\alpha^2+15\alpha+1)=0$$

$\alpha>1$ のとき、$3\alpha^3+9\alpha^2+15\alpha+1>0$ より、$\alpha=3$

よって、$P_1\left(3、\dfrac{1}{10}\right)$、$P_2\left(3、\dfrac{9}{10}\right)$ となる。

これより、求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)\cdot\left\{3-\left(-\frac{11}{3}\right)\right\}=\frac{8}{3}$$

参考　(1) の 参考 より、$\ell_1$ と $\ell_2$ の交点は $\left(-\dfrac{11}{3}、\dfrac{1}{2}\right)$ と分かるので、$\ell_1$ に代入して $\alpha$ を求めてもよい。