1 次の定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}}(5x-3)^6dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{e}\log 2x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{2x+3}{x^2+3x}dx$

(解説)

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}}(5x-3)^6dx=\left[\frac{(5x-3)^7}{35}\right]_0^{\frac{2}{5}}=\frac{2186}{35}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{4}$

(3) $\displaystyle\int_1^{e}\log 2x\,dx=\Big[x\log 2x-x\Big]_1^{e}=(e-1)\log 2+1$

(4) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{2x+3}{x^2+3x}dx=\Big[\log|x^2+3x|\Big]_1^{2}=\log\frac{5}{2}$

2 関数 $f(x)=(1+\cos x)^3-1-3\cos x$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい。

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ において、$f(x)\geqq 0$ であることを証明しなさい。

(解説)

(1)
$$\begin{aligned}f'(x)&=3(-\sin x)(1+\cos x)^2+3\sin x\\&=3\sin x\{-(1+\cos x)^2+1\}\\&=3\sin x(-\cos^2 x-2\cos x)\\&=-3\sin x\cos x(\cos x+2)\end{aligned}$$

(2) $f'(x)=-\dfrac{3}{2}\sin 2x(\cos x+2)$ より、増減表は以下のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

よって、$0\leqq x\leqq\pi$ で $f(x)\geqq 0$ となる。

3 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}t(\cos t-x\sin t)^2dt$ により関数 $f(x)$ を定める。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos^2 t\,dt$ を求めなさい。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\cos t\,dt$ を求めなさい。

(3) $f(x)$ を求めて、その最小値を求めなさい。

(解説)

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos^2 t\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2t\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)'dt\\&=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{t}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt\right\}\\&=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\cos t\,dt&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin 2t\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)'dt\\&=-\frac{1}{4}\Big[t\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt\\&=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t(\cos t-x\sin t)^2dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t(\cos^2 t-2x\cos t\sin t+x^2\sin^2 t)dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\{\cos^2 t-2x\sin t\cos t+x^2(1-\cos^2 t)\}dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(1-x^2)t\cos^2 t-2x\cdot t\sin t\cos t+tx^2\}dt\\&=(1-x^2)\cdot\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}\right)-2x\cdot\frac{\pi}{8}+x^2\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi^2+4}{16}x^2-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2-4}{16}\\&=\frac{\pi^2+4}{16}\left(x-\frac{2\pi}{\pi^2+4}\right)^2+\frac{\pi^4-4\pi^2-16}{16(\pi^2+4)}\end{aligned}$$

よって、$x=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}$ のとき、最小値 $\dfrac{\pi^4-4\pi^2-16}{16(\pi^2+4)}$