## ◇２０２４年度日本医科大学後期

**1** 中が見えない袋 O、A、B がある。袋 O の中には赤玉 2 個、白玉 4 個が入っており、袋 A と袋 B の中には何も入っていない。1 から 6 の目をもつ大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げて出た目をそれぞれ $a$、$b$ とするとき、以下の各操作を（操作 1）、（操作 2）、（操作 3）の順に 1 度ずつ行う。

（操作 1） 袋 O の中から無作為に $a$ 個の玉を取り出して、袋 A の中に入れる。
（操作 2） 袋 O の中から無作為に $min\{b、6-a\}$ 個の玉を取り出して、袋 B の中に入れる。ただし、2 つの実数 $x$、$y$ のうち大きくない方の値を $min\{x、y\}$ で表す。また、$min\{b、6-a\}=0$ の場合には、袋 O から袋 B への玉の移動は行わない。
（操作 3） $ab$ が 6 の倍数である場合に限り、袋 A の中から無作為に 1 個の玉を取り出して、袋 B の中に入れる。

なお、各操作で取り出した玉は元に戻さない。以上の操作をすべて終えたとき、袋 A の中に入っている玉の個数を $N_A$、袋 A の中に入っている赤玉の個数を $N_{A、R}$、袋 B の中に入っている玉の個数を $N_B$、袋 B の中に入っている赤玉の個数を $N_{B、R}$ とする。
以下の各問いの $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ク}$ に適する 1 以上の整数を求めよ。ただし、分数は既約分数で表すこと。

問 1 $N_A=4$ である確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

問 2 $N_B=4$ である確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

問 3 $N_A \geqq 4$ かつ $N_{A、R}=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

問 4 $N_A=4$ かつ $N_{A、R}=1$ という条件の下で、$N_{B、R}=1$ なる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

（解説）
以下、表の「操作 2」は（操作 2）が終わった時点の $(N_A、N_B)$ を表す。
操作 3 を行った場合には「操作 3」の欄に（操作 3）が終わった時点の $(N_A、N_B)$ を表す。

（i） $a=1$ のとき

| $b$ | $min(b、6-a)$ | 操作 2 | 操作 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | (1、5) | (1、1) | |
| 2 | (2、5) | (1、2) | |
| 3 | (3、5) | (1、3) | |
| 4 | (4、5) | (1、4) | |
| 5 | (5、5) | (1、5) | |
| 6 | (6、5) | (1、5) | (0、6) |

（ii） $a=2$ のとき

| $b$ | $min(b、6-a)$ | 操作 2 | 操作 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | (1、4) | (2、1) | |
| 2 | (2、4) | (2、2) | |
| 3 | (3、4) | (2、3) | (1、4) |
| 4 | (4、4) | (2、4) | |
| 5 | (5、4) | (2、4) | |
| 6 | (6、4) | (2、4) | (1、5) |

（iii） $a=3$ のとき

| $b$ | $min(b、6-a)$ | 操作 2 | 操作 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | (1、3) | (3、1) | |
| 2 | (2、3) | (3、2) | (2、3) |
| 3 | (3、3) | (3、3) | |
| 4 | (4、3) | (3、3) | (2、4) |
| 5 | (5、3) | (3、3) | |
| 6 | (6、3) | (3、3) | (2、4) |

（iv） $a=4$ のとき

| $b$ | $min(b、6-a)$ | 操作 2 | 操作 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | (1、2) | (4、1) | |
| 2 | (2、2) | (4、2) | |
| 3 | (3、2) | (4、2) | (3、3) |
| 4 | (4、2) | (4、2) | |
| 5 | (5、2) | (4、2) | |
| 6 | (6、2) | (4、2) | (3、3) |

（v） $a=5$ のとき

| $b$ | $min(b、6-a)$ | 操作 2 | 操作 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | (1、1) | (5、1) | |
| 2 | (2、1) | (5、1) | |
| 3 | (3、1) | (5、1) | |
| 4 | (4、1) | (5、1) | |
| 5 | (5、1) | (5、1) | |
| 6 | (6、1) | (5、1) | (4、2) |

（vi） $a=6$ のとき

| $b$ | $min(b、6-a)$ | 操作 2 | 操作 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | (1、0) | (6、0) | (5、1) |
| 2 | (2、0) | (6、0) | (5、1) |
| 3 | (3、0) | (6、0) | (5、1) |
| 4 | (4、0) | (6、0) | (5、1) |
| 5 | (5、0) | (6、0) | (5、1) |
| 6 | (6、0) | (6、0) | (5、1) |

（参考） スペースの問題で表を 1 つにまとめられなかったので分けた。

問 1 $N_A=4$ となるのは、表より
$(a、b)=(4、1)、(4、2)、(4、4)、(4、5)、(5、6)$
の 5 通りより、求める確率は $\dfrac{5}{36}$

問 2 $N_B=4$ となるのは、表より
$(a、b)=(1、4)、(2、3)、(2、4)、(2、5)、(3、4)、(3、6)$
の 6 通りより、求める確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

問 3 $N_A \geqq 4$ となるのは、表より
$(a、b)=(4、1)、(4、2)、(4、4)、(4、5)、(5、任意)、(6、任意)$
の 16 通りである。
①：$(a、b)=(4、1)、(4、2)、(4、4)、(4、5)$ のとき
操作 1 で、赤玉 2 個と白玉 2 個を取り出せばよいので、確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_2\times{}_4C_2}{{}_6C_4}\times\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{36}\times\frac{8}{5}$$

②：$(a、b)=(5、1)、(5、2)、(5、3)、(5、4)、(5、5)$ のとき
操作 1 で、赤玉 2 個と白玉 3 個を取り出せばよいので、確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_2\times{}_4C_3}{{}_6C_5}\times\frac{1}{6}\times5=\frac{1}{36}\times\frac{10}{3}$$

③：$(a、b)=(5、6)$ のとき
操作 1 で赤玉 2 個と白玉 3 個を取り出し、操作 3 で白玉を取り出せばよいので確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_2\times{}_4C_3}{{}_6C_5}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{36}\times\frac{2}{5}$$

④：$(a、b)=(6、1)、(6、2)、(6、3)、(6、4)、(6、5)、(6、6)$ のとき
操作 1 で赤玉 2 個と白玉 4 個を取り出し、操作 3 で白玉を取り出せばよいので
確率は、$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times6\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{36}\times4$
よって、求める確率は、①～④ より

$$\frac{1}{36}\left(\frac{8}{5}+\frac{10}{3}+\frac{2}{5}+4\right)=\frac{7}{27}$$

問 4 $N_A=4$ となるのは、表より
$(a、b)=(4、1)、(4、2)、(4、4)、(4、5)、(5、6)$
である。
$N_A=4$ かつ $N_{A、R}=1$ となるのは
①：$(a、b)=(4、1)$ のとき
操作 1 で、赤玉 1 個と白玉 3 個を取り出し、操作 2 で 1 個取り出せばよいので、確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_4C_3}{{}_6C_4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\times\frac{8}{15}$$

このうち、$N_{B、R}=1$ となるのは、操作 2 で白玉を取り出せばよいので

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_4C_3}{{}_6C_4}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{36}\times\frac{4}{15}$$

②：$(a、b)=(4、2)、(4、4)、(4、5)$ のとき
操作 1 で、赤玉 1 個と白玉 3 個を取り出し、操作 2 で 2 個取り出せばよいので、確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_4C_3}{{}_6C_4}\times\frac{1}{6}\times1\times3=\frac{1}{36}\times\frac{8}{5}$$

このとき、必ず $N_{B、R}=1$ となる。
③：$(a、b)=(5、6)$ のとき
（あ） 操作 1 で、赤玉 2 個と白玉 3 個を取り出し、操作 3 で赤玉 1 個取り出せばよいので確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_2\times{}_4C_3}{{}_6C_5}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{36}\times\frac{4}{15}$$

このとき、必ず $N_{B、R}=1$ となる。
（い） 操作 1 で、赤玉 1 個と白玉 4 個を取り出し、操作 3 で白玉 1 個取り出せばよいので確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_4C_4}{{}_6C_5}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{36}\times\frac{4}{15}$$

このとき、必ず $N_{B、R}=1$ となる。
① ～ ③ より、$N_A=4$ かつ $N_{A、R}=1$ となる確率は

$$\frac{1}{36}\times\left(\frac{8}{15}+\frac{8}{5}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}\right)=\frac{1}{36}\times\frac{8}{3}$$

このうち、$N_{B、R}=1$ となるのは

$$\frac{1}{36}\times\left(\frac{4}{15}+\frac{8}{5}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}\right)=\frac{1}{36}\times\frac{12}{5}$$

以上より、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{36}\times\frac{12}{5}}{\frac{1}{36}\times\frac{8}{3}}=\frac{9}{10}$$

**2** O を原点とする複素数平面において、O を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円を $C_1$ とし、$C_1$ 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して、複素数平面上の点 $\mathrm{Q}(w)$ を次で定義する。

$$w=\frac{z+i}{z+1}$$

ただし、$i$ は虚数単位とする。また、2 点 P、Q を通る直線を $L$ とおき、$L$ 上の任意の点を $\mathrm{R}(u)$ とおく。このとき、以下の各問いの $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ に適する実数を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　点 $\mathrm{P}(z)$ が $C_1$ 上を動くとき、点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は中心 $\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\,i$、半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円 $C_2$ となる。

問 2　$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ のとき、$L$ 上の任意の点 $\mathrm{R}(u)$ は次の直線の方程式を満たす。
(ただし、複素数 $u$ と共役な複素数を $\overline{u}$ で表す)。

$$\left(\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}\,i\right)u+\left(\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\,i\right)\overline{u}=1$$

また、$L$ と問 1 の $C_2$ の 2 つの交点 $\mathrm{A}(\alpha)$、$\mathrm{B}(\beta)$ は $\alpha=\boxed{\text{ク}}$、$\beta=\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\,i$ で与えられる。

問 3　$L$ が問 2 の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るための必要十分条件は次のように表せる。(ただし、0 でない複素数 $\gamma$ に対して、$arg\gamma$ は $\gamma$ の偏角を表す)。

$$arg\left(\frac{z-\alpha}{z-w}\right)=\boxed{\text{サ}}\ \text{または}\ \boxed{\text{シ}}\quad\left(\text{ただし、}0\leqq\boxed{\text{サ}}<\boxed{\text{シ}}<2\pi\right)$$

問 4　点 $\mathrm{P}(z)$ が $C_1$ 上を動くとし、かつ $L$ が問 2 の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るとする。これら 2 つの条件を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ は全部で $\boxed{\text{ス}}$ 個あり、$\boxed{\text{ス}}$ 個の複素数 $z$ の中で実部の値が最も大きい複素数は $\boxed{\text{セ}}+\boxed{\text{ソ}}\,i$ である。

解説

問 1　点 $\mathrm{P}(z)$ は $C_1$ 上を動くので、

$$|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす。$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ より

$$w(z+1)=z+i$$
$$\therefore\ z(w-1)=-w+i$$

$w\neq1$ より、$z=\dfrac{-w+i}{w-1}$

① に代入して

$$\left|\frac{-w+i}{w-1}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore\ \sqrt{2}\,|w-i|=|w-1|\ \cdots\cdots\cdots ②$$
$$\therefore\ 2(w-i)(\overline{w}+i)=(w-1)(\overline{w}-1)$$
$$\therefore\ 2(w\overline{w}+wi-\overline{w}i+1)=w\overline{w}-w-\overline{w}+1$$
$$\therefore\ w\overline{w}+(1+2i)w+(1-2i)\overline{w}+1=0$$
$$\therefore\ \{w+(1-2i)\}\{\overline{w}+(1+2i)\}=4$$
$$\therefore\ |w+1-2i|=2$$

よって、点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は中心 $-1+2i$ 、半径 2 の円を表す。

別解　② の続き

$w=x+yi$ ($x$、$y$ は実数) とおくと

② より、$\sqrt{2}\,|x+(y-i)i|=|(x-1)+yi|$

$$\therefore\ 2\{x^2+(y-1)^2\}=(x-1)^2+y^2$$
$$\therefore\ x^2+2x+y^2-4y+1=0$$
$$\therefore\ (x+1)^2+(y-2)^2=4$$

よって、点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は中心 $-1+2i$ 、半径 2 の円を表す。

別解　② の続き

②より、$|w-i|:|w-1|=1:\sqrt{2}$

となるので、点 $\mathrm{Q}(w)$ は点 $i$ と点 1 からの距離の比が $1:\sqrt{2}$ となる点である。

つまり、点 $i$ と点 1 を$1:\sqrt{2}$ に内分する点は $\dfrac{\sqrt{2}\,i+1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1+(2-\sqrt{2})i$

点 $i$ と点 1 を$1:\sqrt{2}$ に外分する点は $\dfrac{-\sqrt{2}\,i+1}{1-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}-1+(2+\sqrt{2})i$

となるので、この 2 点を直径の両端とする円になる。

この 2 点の中点は、$\dfrac{\{\sqrt{2}-1+(2-\sqrt{2})i\}+\{-\sqrt{2}-1+(2+\sqrt{2})i\}}{2}=-1+2i$

中点から内分点までの距離は、$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$

よって、点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は中心 $-1+2i$ 、半径 2 の円を表す。

問 2　$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ より、$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ から

$$w=\frac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i+i}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i}$$
$$=\frac{-1+3i}{1+i}$$
$$=1+2i\ \cdots\cdots\cdots ③$$

よって、$xy$ 平面上に直すと、$L$ は$\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$、$(1,\ 2)$ を通る直線となるので

$$y=\frac{2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}(x-1)+2=x+1$$
$$\therefore\ -x+y=1\ \cdots\cdots\cdots ④$$

$u$ は $L$ 上より、$u=x+yi$ ($x$、$y$ は実数) とおける。

よって、$\overline{u}=x-yi$ と連立して、$\begin{cases}x=\dfrac{u+\overline{u}}{2}\\ y=\dfrac{u-\overline{u}}{2i}\end{cases}$ となるので、④ に代入して

$$-\frac{u+\overline{u}}{2}+\frac{u-\overline{u}}{2i}=1$$
$$\therefore\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}\right)u+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}\right)\overline{u}=1$$
$$\therefore\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)u+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\overline{u}=1$$

$C_2$ を $xy$ 平面に直すと、$(x+1)^2+(y-2)^2=4$ より

④ と連立して、$(x+1)^2+(x-1)^2=4$

$$\therefore\ x^2=1$$
$$\therefore\ x=\pm1$$

④ より、$(x,\ y)=(1,\ 2)$、$(-1,\ 0)$

複素数平面に直して、$\alpha=-1$、$\beta=1+2i$

別解　③ の続き

$\mathrm{P}(z)$、$\mathrm{Q}(w)$、$\mathrm{R}(u)$ は同一直線上より、$\dfrac{u-w}{u-z}$ が実数となればよい。

よって、$\dfrac{u-w}{u-z}=\overline{\left(\dfrac{u-w}{u-z}\right)}$

$$\therefore\ \frac{u-w}{u-z}=\frac{\overline{u}-\overline{w}}{\overline{u}-\overline{z}}$$
$$\therefore\ (u-w)(\overline{u}-\overline{z})=(u-z)(\overline{u}-\overline{w})$$
$$\therefore\ u\overline{u}-u\overline{z}-w\overline{u}+w\overline{z}=u\overline{u}-u\overline{w}-\overline{u}z+\overline{w}z$$
$$\therefore\ (\overline{w}-\overline{z})u+(z-w)\overline{u}=\overline{w}z-w\overline{z}$$
$$\therefore\ \frac{3}{2}(1-i)u-\frac{3}{2}(1-i)\overline{u}=3i$$
$$\therefore\ \frac{-i}{2}(1-i)u+\frac{i}{2}(1-i)\overline{u}=1$$
$$\therefore\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)u+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\overline{u}=1$$

以下略

問 3　点 $z$、$w$、$\alpha$ が同一直線上より、$\dfrac{z-\alpha}{z-w}$ が実数となればよい。

つまり、$arg\left(\dfrac{z-\alpha}{z-w}\right)=0$、$\pi$

問 4　$L$ が点 A $(-1)$ を通るので、問 3 より、$\dfrac{z+1}{z-w}$ が実数となればよい。

よって、$\dfrac{z+1}{z-w}=\dfrac{z+1}{z-\dfrac{z-i}{z+1}}=\dfrac{(z+1)^2}{z^2-i}$

$z=x+yi$ ($x$、$y$ は実数) とおくと

$$\frac{(z+1)^2}{z^2-i}=\frac{(x+yi+1)^2}{(x+yi)^2-i}$$
$$=\frac{x^2-y^2+2x+1+2y(x+1)i}{x^2-y^2+(2xy-1)i}$$
$$=\frac{\{x^2-y^2+2x+1+2y(x+1)i\}\{x^2-y^2-(2xy-1)i\}}{\{x^2-y^2+(2xy-1)i\}\{x^2-y^2-(2xy-1)i\}}$$

分母は実数より、分子の虚部は

$$2y(x+1)(x^2-y^2)-(x^2-y^2+2x+1)(2xy-1)$$
$$=-2x^2y-2y^3+x^2-y^2-2xy+2x+1$$

となる。これが 0 であれば実数となるので

$$-2x^2y-2y^3+x^2-y^2-2xy+2x+1=0$$
$$\therefore\ -2y(x^2+y^2)+x^2-y^2-2xy+2x+1=0\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで、点 $\mathrm{P}(z)$ は ① を満たすので、$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ より、$y^2=-x^2+\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots\cdots ⑥$

⑤ に代入して

$$-2y\cdot\frac{1}{2}+\left(-x^2+\frac{1}{2}\right)+y^2-2xy+2x+1=0$$
$$\therefore\ y(2x+1)=2x^2+2x+\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ 2y(2x+1)=4x^2+4x+1$$
$$\therefore\ 2y(2x+1)=(2x+1)^2$$
$$\therefore\ (2x+1)(2y-2x-1)=0$$

$\therefore \quad x=-\dfrac{1}{2}$、$y=x+\dfrac{1}{2}$

・$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき

⑥ より、$(x、y)=\left(-\dfrac{1}{2}、\pm\dfrac{1}{2}\right)$

よって、$z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$

・$y=x+\dfrac{1}{2}$ のとき

⑥ より、$x^2+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad 8x^2+4x-1=0$

$\therefore \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$

$y=x+\dfrac{1}{2}$ より、$y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}$ (複号同順)

よって、$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}+(1\pm\sqrt{3})i}{4}$ (複号同順)

これより、条件を満たす $\mathrm{P}(z)$ の個数は 4 個

実部が最大のものは、$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{4}$

別解　$L$ が点 $\mathrm{A}\,(-1)$ を通るので、問 3 より、$\dfrac{z+1}{z-w}$ が実数となればよい。

よって、$\dfrac{z+1}{z-w}=\dfrac{z+1}{z-\dfrac{z-i}{z+1}}=\dfrac{(z+1)^2}{z^2-i}$ より

$$\frac{(z+1)^2}{z^2-i}=\frac{(\overline{z}+1)^2}{\overline{z}^2+i} \cdots\cdots\cdots ⑦$$

ここで、点 $\mathrm{P}(z)$ は ① を満たすので、$z\overline{z}=\dfrac{1}{2}$ より、$\overline{z}=\dfrac{1}{2z}$

⑦ の左辺に代入して、

$$\frac{(\overline{z}+1)^2}{\overline{z}^2+i}=\frac{\left(\dfrac{1}{2z}+1\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2z}\right)^2+i}$$

$$=\frac{(1+2z)^2}{1+4z^2i}$$

⑦ より、$\dfrac{(z+1)^2}{z^2-i}=\dfrac{(1+2z)^2}{1+4z^2i}$

$\therefore \quad (1+4z^2i)(z+1)^2=(1+2z)^2(z^2-i)$

$\therefore \quad 4(1-i)z^4+4(1-2i)z^3-8z^2i-2(1+2i)z-1-i=0 \cdots\cdots\cdots ⑧$

$\mathrm{A}(\alpha)$ は問 2 の $L$ 上より、⑧ は $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を解にもつ。

また、$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ について、$w$ を求めてみると

$$w=\frac{\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)+i}{\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)+1}=\frac{-1+i}{1-i}=-1$$

よって、$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ のときも $L$ は $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るので、⑧ の解となる。

これより、$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ と $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ を解にもつ $z$ の方程式は

$$\left(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=z^2+z+\frac{1}{2}$$

⑧ の左辺を $2\left(z^2+z+\dfrac{1}{2}\right)=2z^2+2z+1$ で割ると

$$\begin{array}{r|l}
 & 2(1-i)z^2+2zi-(1+i) \\ \hline
2z^2+2z+1 & 4(1-i)z^4+4(1-2i)z^3-8z^2i-2(1+2i)z-1-i \\
 & 4(1-i)z^4+4(1-i)z^3+2(1-i)z^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 4z^3i-2(1+3i)z^2-2(1+i)z \\
 & \qquad 4z^3i+4z^2i+2zi \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -2(1+i)z^2-2(1+i)z-1-i \\
 & \qquad\qquad -2(1+i)z^2-2(1+i)z-1-i \\ \cline{2-2}
 & \hfill 0
\end{array}$$

となるので、$2(1-i)z^2+2zi-1-i=0 \cdots\cdots\cdots ⑨$　の解が残りの解となる。

$z=x+yi$ ($x$、$y$ は実数) とおくと

$2(1-i)(x+yi)^2+2(x+yi)i-1-i=0$

$\therefore \quad 2x^2-2y^2+4xy+2y-1+i(-2x^2+2y^2+4xy-2x-1)=0$

$x$、$y$ は実数より

$$\begin{cases} 2x^2-2y^2+4xy+2y-1=0 \cdots\cdots ⑩ \\ -2x^2+2y^2+4xy-2x-1=0 \cdots\cdots ⑪ \end{cases}$$

$\dfrac{⑩+⑪}{2}$、$\dfrac{⑩-⑪}{2}$ より

$$\begin{cases} 4xy-x+y-1=0 \cdots\cdots ⑫ \\ 2x^2-2y^2+x+y=0 \cdots\cdots ⑬ \end{cases}$$

⑬ より、$2(x-y)(x+y)+(x-y)=0$

$\therefore \quad (2x-2y+1)(x+y)=0$

$\therefore \quad y=-x$、$y=x+\dfrac{1}{2}$

・$y=-x$ のとき

⑫ より、$-4x^2-2x-1=0$

判別式を $D$ とすると、$D/4=1-4=-3<0$

よって、実数解を持たないので不適。

・$y=x+\dfrac{1}{2}$ のとき

⑫ より、$4x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-x-1=0$

$\therefore \quad 4x^2+2x-1=0$

$\therefore \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$

$y=x+\dfrac{1}{2}$ より、$y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}$ (複号同順)

これより、条件を満たす $\mathrm{P}(z)$ の個数は 4 個

実部が最大のものは、$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{4}$

**3** 平面上の3点O、A、Bを、OA=OB=1、かつ $0<\angle \mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすようにとる。$\theta=\angle \mathrm{AOB}$ とおく。点 $\mathrm{P}_1$ を点Aとする。$\mathrm{P}_1$ より直線OBに垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を下ろし、$\mathrm{Q}_1$ より直線OAに垂線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ を下ろし、以下同様にして、点 $\mathrm{P}_1$、$\mathrm{P}_2$、$\mathrm{P}_3$、……、を直線OA上に、点 $\mathrm{Q}_1$、$\mathrm{Q}_2$、$\mathrm{Q}_3$、…… を直線OB上に、それぞれとる。また、三角形 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$ ($k=1$、2、……) の面積を $S_k$ とする。正の実数 $p$、$q$ に対して、関数 $A_p(\theta)$、$B_q(\theta)$、および、$C(\theta)$ を次で定める。

$$A_p(\theta)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k)^p+(\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1})^p\right\}\right)^{\frac{1}{p}}、B_q(\theta)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k)^q\right\}^{\frac{1}{q}}、C(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}S_k$$

以下の各問いに答えよ。ただし、平面上の相違なる2点X、Yに対して、XYは線分XYの長さを表す。

問1 $A_p(\theta)$ を $\theta$、$p$ を用いて表せ。答えのみでよい。

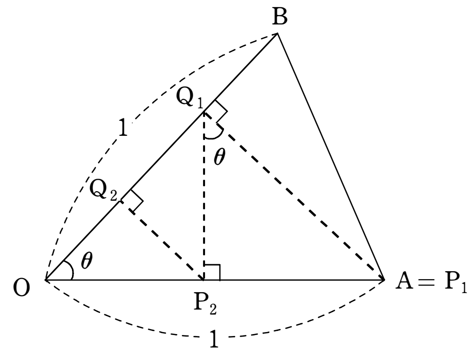
問2 $B_q(\theta)$ を $\theta$、$q$ を用いて表せ。答えのみでよい。

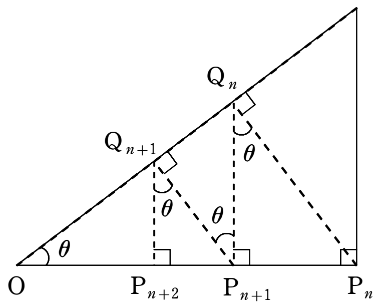
問3 $C(\theta)$ を $\theta$ を用いて表せ。答えのみでよい。

問4 次の極限が存在し、かつその極限値が正となるための $p$ に対する必要十分条件を求めよ。また、そのときの極限値も答えること。ただし、記号 $\lim\limits_{\theta\to+0}$ は $\theta>0$ の範囲で $\theta$ を0に限りなく近づけたときの極限を意味する。

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}$$

解説




問1 図より

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n}{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\cos\theta \cdots\cdots ①\\[2mm] \dfrac{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n}=\cos\theta \cdots\cdots ②\\[2mm] \dfrac{\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{Q}_{n+1}}{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=\cos\theta \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①より、$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\cos\theta$ ………①′

②より、$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}=\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n\cos\theta$ ………②′

①′を代入して

$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}=\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\cos\theta\cdot\cos\theta$

$\therefore\ \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}=\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\cos^2\theta$

$\therefore\ \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\cdot(\cos^2\theta)^{n-1}$

図より、$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=\sin\theta$

よって、$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sin\theta\cdot(\cos^2\theta)^{n-1}$

$\therefore\ \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sin\theta\cdot\cos^{2(n-1)}\theta$

③より、$\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{Q}_{n+1}=\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\cos\theta$

②′を代入して

$\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{Q}_{n+1}=\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n\cos\theta\cdot\cos\theta$

$\therefore\ \mathrm{P}_{n+2}\mathrm{Q}_{n+1}=\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n\cos^2\theta$

$\therefore\ \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1\cdot(\cos^2\theta)^{n-1}$

図より、$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1=\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$

よって、$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\sin\theta\cos\theta\cdot(\cos^2\theta)^{n-1}$

$\therefore\ \mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}=\sin\theta\cos^{2n-1}\theta$

これより

$$A_p(\theta)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\{(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k)^p+(\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1})^p\}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sin^p\theta\cdot\cos^{2(k-1)p}\theta+\sin^p\theta\cos^{(2k-1)p}\theta\right\}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sin^p\theta(1+\cos^p\theta)\cdot(\cos^{2p}\theta)^{k-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より、$|\cos^{2p}\theta|<1$

よって、$\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin^p\theta(1+\cos^p\theta)\cdot(\cos^{2p}\theta)^{k-1}\right)^{\frac{1}{p}}=\left\{\dfrac{\sin^p\theta(1+\cos^p\theta)}{1-\cos^{2p}\theta}\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$=\left(\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{1}{p}}}$$

問2 問1と同様にして

$$B_q(\theta)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k)^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sin^q\theta\cdot(\cos^{2q}\theta)^{k-1}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{\sin^q\theta}{1-\cos^{2q}\theta}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\sin\theta}{(1-\cos^{2q}\theta)^{\frac{1}{q}}}$$

問3 図より、$\dfrac{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}{\mathrm{OQ}_n}=\tan\theta$

$\therefore\ \mathrm{OQ}_n=\dfrac{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}{\tan\theta}$

よって、$S_n=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\times\mathrm{OQ}_n$

$$=\frac{1}{2}\times\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\times\frac{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}{\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\cdot(\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^{4(n-1)}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\cos^4\theta)^{n-1}$$

となるので、$C(\theta)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}S_k$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\cos^4\theta)^{k-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^4\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{2\sin\theta(1+\cos^2\theta)}$$

問4

$$\frac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}=\frac{\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{1}{p}}}\cdot\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{2}{p}}}}{\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta(1+\cos^2\theta)}}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{3}{p}}}\cdot\frac{2\sin\theta(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}$$

$$=\frac{2(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{\theta^3}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{3}{p}}}$$

$$=\frac{2(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\left(\frac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{3}{p}}$$

ここで、$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{2(1+\cos\theta)}{\cos\theta}\cdot\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^3=4$ より、$\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{2}{p}}$ について考える。

(i) $p=2$ のとき

$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}=\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^2=1$ より

$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}=4\times1=4$

(ii) $p>2$ のとき

$0<\dfrac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}<\dfrac{\theta^p}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}$

ここで、$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}=\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^2\cdot\theta^{p-2}=0$

よって、はさみうちの原理より、$\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{2}{p}}=0$

これより、$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}=0$

(iii) $p<2$ のとき

$\dfrac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}>\dfrac{\theta^p}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}$

ここで、$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}=\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^2\cdot\theta^{p-2}=\infty$

よって、追い出しの原理より、$\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{2}{p}}=\infty$

これより、$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}$ は発散する。

以上より、$p=2$ のとき収束し、そのときの極限値は4である。

**4** $n=0$、1、2、……、$m=1$、2、3、…… とするとき

$$I_n(m)=\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}dx\right)$$

と定め、

$$L_m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left\{\frac{I_{mn}(m)}{I_n(m)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

と定める。このとき、以下の各問いに従って、極限 $I_n(m)$ が存在することを示し、また、極限 $I_n(m)$ と $L_m$ を求めることを考える。

問 1　$x$ を正の実数とするとき、0 以上の全ての整数 $N$ に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$e^x>\frac{x^N}{N!}$$

問 2　以下の (1) ～ (3) に答えよ。

(1)　極限 $I_0(m)$ を $m$ を用いて表せ。答えのみでよい。

(2)　極限 $I_n(m)$ の存在を仮定して、極限 $I_{n+1}(m)$ が存在することを示し、$I_n(m)$ を用いて $I_{n+1}(m)$ を表せ。

(3)　極限 $I_n(m)$ の存在を示し、$I_n(m)$ を $n$、$m$ を用いて具体的に表せ。

問 3　$m\geqq 2$ のとき、極限 $L_m$ を $m$ を用いて表せ。

解説

問 1　数学的帰納法を用いて示す。

（ⅰ）　$N=0$ のとき

$x>0$ で、(左辺)$=e^x>1$

(右辺)$=\dfrac{x^0}{0!}=1$

よって、$N=0$ のとき、成立。

（ⅱ）　$N=k$ ($k$ は 0 以上の整数) のとき、$x>0$ で、$e^x>\dfrac{x^k}{k!}$ が成り立つと仮定する。

$f_{k+1}(x)=e^x-\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ とおくと

$x>0$ で、$f'_{k+1}(x)=e^x-\dfrac{x^k}{k!}$

よって、仮定より、$f'_{k+1}(x)>0$ となるので

$x>0$ で、$f_{k+1}(x)$ は単調増加で、$f_{k+1}(0)=1$ より、$f_{k+1}(x)>0$

よって、$N=k+1$ のときも成り立つので、0 以上のすべての整数 $N$ に対して与式は成り立つ。

問 2

(1)

$$\begin{aligned}I_0(m)&=\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{m-1}e^{-x^m}dx\right)\\&=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{m}\int_0^M(-x^m)'e^{-x^m}dx\right)\\&=\lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{m}e^{-x^m}\right]_0^M\\&=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{m}e^{-M^m}+\frac{1}{m}\right)\\&=\frac{1}{m}\end{aligned}$$

別解　$\displaystyle\int_0^M x^{m-1}e^{-x^m}dx$ について

$x^m=t$ とおくと、$mx^{m-1}dx=dt$

$x:0\to M$ のとき、$t:0\to M^m$ より

$$\begin{aligned}\int_0^M x^{m-1}e^{-x^m}dx&=\int_0^{M^m}\frac{1}{m}e^{-t}dt\\&=\frac{1}{m}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{M^m}\\&=\frac{1}{m}\left(-e^{-M^m}+1\right)\\&=-\frac{1}{m}e^{-M^m}+\frac{1}{m}\end{aligned}$$

以下略

(2)　$I_{n+1}(m)=\displaystyle\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{m(n+1)+m-1}e^{-x^m}dx\right)$ より

$$\begin{aligned}\int_0^M x^{m(n+1)+m-1}e^{-x^m}dx&=\int_0^M x^{mn+m}\cdot x^{m-1}e^{-x^m}dx\\&=\int_0^M x^{mn+m}\cdot\left(-\frac{e^{-x^m}}{m}\right)'dx\\&=\left[x^{mn+m}\cdot\left(-\frac{e^{-x^m}}{m}\right)\right]_0^M-\int_0^M(mn+m)x^{mn+m-1}\cdot\left(-\frac{e^{-x^m}}{m}\right)dx\\&=-\frac{M^{mn+m}}{m}\cdot e^{-M^m}+(n+1)\int_0^M x^{mn+m-1}\cdot e^{-x^m}dx\end{aligned}$$

ここで、問 1 より、$e^x>\dfrac{x^N}{N!}$

$x=M^m$ ($>0$)、$N=n+2$ ($n$ は自然数) とおくと

$$e^{M^m}>\frac{(M^m)^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\therefore\ \frac{(n+2)!}{M^m}>\frac{M^{m(n+1)}}{e^{M^m}}>0$$

$$\therefore\ \frac{(n+2)!}{mM^m}>\frac{M^{m(n+1)}}{me^{M^m}}>0$$

$\displaystyle\lim_{M\to\infty}\frac{(n+2)!}{mM^m}=0$ より、はさみうちの原理から、$\displaystyle\lim_{M\to\infty}\frac{M^{m(n+1)}}{mM^m}=0$

$I_n(m)=\displaystyle\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}dx\right)$ が存在すると仮定すると

$I_{n+1}(m)=(n+1)I_n(m)$

よって、$I_{n+1}(m)$ は存在する。

(3)　数学的帰納法を用いて示す。

（ⅰ）　$n=0$ のとき

(1) より、$I_n(m)$ は存在する。

（ⅱ）　$n=k$ のとき、$I_k(m)$ が存在すると仮定すると

(2) より、$I_{k+1}(m)$ は存在する。

よって、0 以上の整数 $n$ で $I_n(m)$ は存在する。

このとき、

$$\begin{aligned}I_n(m)&=nI_{n-1}(m)\\&=n\cdot(n-1)I_{n-2}(m)\\&=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot I_{n-3}(m)\\&=\cdots\cdots=n!\cdot I_0(m)\end{aligned}$$

$$\therefore\ I_n(m)=\frac{n!}{m}$$

問 3　問 2 (2) より

$$\begin{aligned}L_m&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left\{\frac{I_{mn}(m)}{I_n(m)}\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\cdot\left\{\frac{\frac{(nm)!}{m}}{\frac{n!}{m}}\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\cdot\left\{\frac{(mn)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

ここで、$a_n=\dfrac{1}{n^{m-1}}\cdot\left\{\dfrac{(mn)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$ ($>0$) とおくと

$$\begin{aligned}\log a_n&=\log\frac{1}{n^{m-1}}\cdot\left\{\frac{(mn)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\log\left\{\frac{(mn)!}{n^{n(m-1)}\cdot n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\frac{1}{n}\log\frac{(mn)!}{n^{n(m-1)}\cdot n!}\\&=\frac{1}{n}\log\left(\frac{mn}{n}\cdot\frac{mn-1}{n}\cdot\frac{mn-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}\log\frac{k}{n}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}\log\frac{k}{n}\\&=\int_1^m\log x\,dx\\&=\Big[x\log x-x\Big]_1^m\\&=m\log m-m+1\\&=\log m^m-\log e^{m-1}\\&=\log\frac{m^m}{e^{m-1}}\end{aligned}$$

$x>0$ で、$y=\log x$ は連続より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{m^m}{e^{m-1}}$

よって、$L_m=\dfrac{m^m}{e^{m-1}}$