1 角 α を $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$、かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。三角形 OAB は $\mathrm{OA}=2$、$\mathrm{OB}=3$、$\alpha<\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとし。三角形 OAB の垂心を H とする。

$x=\cos\angle\mathrm{AOB}$ とおくとき、以下の各問い $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に入る適切な数を求めよ。ただし、$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ は 1 以上の整数で答えよ。また $\boxed{\text{ス}}$ に関しては下の指示に従うこと。

問 1　x の動く範囲は $\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ である。

問 2　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は次のようになる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{x\left(\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}x\right)}{\boxed{\text{オ}}(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{x\left(\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}x\right)}{\boxed{\text{ク}}(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

問 3　三角形 HAB の面積 $S(x)$ は次のように表せる。

$$S(x)=\frac{\boxed{\text{ケ}}x^2-\boxed{\text{コ}}x+\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}\sqrt{1-x^2}}$$

問 4　x が問 1 で求めた範囲を $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{イ}}$ まで動くとき(ただし、端点は除く)、問 3 の $S(x)$ は、$\boxed{\text{ス}}$。

上記の文中の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを、次の (あ) ～ (え) の中から 1 つ選べ。

なお、以下の選択肢において、c は $\boxed{\text{ア}}<c<\boxed{\text{イ}}$ を満たす定数とする。ただし、$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には問 1 で求めた数が入る。

(あ)　単調に増加する
(い)　単調に減少する
(う)　$\boxed{\text{ア}}<x<c$ で増加し、$c<x<\boxed{\text{イ}}$ で減少する。
(え)　$\boxed{\text{ア}}<x<c$ で減少し、$c<x<\boxed{\text{イ}}$ で増加する。

解説

問 1　$\alpha<\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\cos\frac{\pi}{2}<\cos\angle\mathrm{AOB}<\cos\alpha$$

$$\therefore\quad 0<x<\frac{2}{3}$$

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと (s、t は実数)

H は△OAB の垂心より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ (\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ (s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}$$

ここで、$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=4$、$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=9$、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=2\cdot3\cdot x=6x$ より

$$\begin{cases}6sx+9t=6x\\ 4s+6tx=6x\end{cases}$$

$$\therefore\quad s=\frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}\text{、}\ t=\frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{x(2-3x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

問 3　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{x(2-3x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{x(13-12x)}{6(1-x^2)}\cdot\left\{\frac{3x(3-2x)}{x(13-12x)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2x(2-3x)}{x(13-12x)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}$$

直線 OH と AB の交点を D とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3x(3-2x)}{x(13-12x)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2x(2-3x)}{x(13-12x)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるので

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}:\mathrm{HD}&=1:1-\frac{x(13-12x)}{6(1-x^2)}\\ &=1:\frac{6x^2-13x+6}{6(1-x^2)}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{6x^2-13x+6}{6(1-x^2)}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\\ &=\frac{6x^2-13x+6}{6(1-x^2)}\times\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}\\ &=\frac{6x^2-13x+6}{2(1-x^2)}\times\sqrt{1-x^2}\\ &=\frac{6x^2-13x+6}{2\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

問 4　$0<x<\dfrac{2}{3}$ において

$$\begin{aligned}S'(x)&=\frac{(12x-13)\cdot2\sqrt{1-x^2}-(6x^2-13x+6)\cdot2\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{4(1-x^2)}\\ &=\frac{-6x^3+18x-13}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

ここで、$f(x)=-6x^3+18x-13$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=-18x^2+18\\ &=-18(x^2-1)>0\end{aligned}$$

よって、$0<x<\dfrac{2}{3}$ で、$f(x)$ は単調増加で、$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{25}{9}<0$ より

$0<x<\dfrac{2}{3}$ で $f(x)<0$ となる。

よって、$S'(x)=\dfrac{f(x)}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}<0$ となるので、$0<x<\dfrac{2}{3}$ で $S(x)$ は単調減少である 。

2　以下では、$m=1$、2、3、……、$n=0$、1、2、……、$k=0$、1、2、……、m とする。中が見えない袋の中に、互いに区別のつかない白玉がm 個、互いに区別のつかない赤玉が n 個入っている。この袋の中から無作為に 1 個の玉を取り出し、その玉の色を確認したあとに取り出した玉を袋の中に戻すという操作を m 回繰り返す。この試行において赤玉が k 回取り出される確率を$p_{m、n}(k)$ とし、$q_{m、n}$、R_n、$S_n(k)$ を次式で定めるとき、以下の各問いに答えよ。

$$q_{m、n}=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot p_{m、n}(k)\text{、}R_n=\lim_{m\to\infty}q_{m、n}\text{、}S_n(k)=\lim_{m\to\infty}p_{m、n}(k)$$

問 1　$q_{m、n}$ は

$$q_{m、n}=\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^{\boxed{\text{ウ}}}$$

と表される。$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イ}}$、$\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な m、n の整式を求めよ。答えのみでよい。

問 2　極限 R_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　極限 $S_n(k)$ を n、k を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}R_n\cdot S_n(3)\right\}$$

解説

問 1　白玉 m 個、赤玉 n 個、合計 $m+n$ 個入った袋から、赤玉 1 個を取り出す確率は $\dfrac{n}{m+n}$ である。

よって、袋から玉を 1 個取り出し色を確認したあとに、取り出した玉を袋の中に戻すという操作を m 回繰り返したときの赤玉が k 回取り出される確率 $p_{m、n}(k)$ は

$$p_{m、n}(k)={}_mC_k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}$$

よって

$$\begin{aligned}q_{m、n}&=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot p_{m、n}(k)\\&=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot{}_mC_k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}\\&=\sum_{k=0}^{m}{}_mC_k\cdot\left(\frac{2n}{m+n}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}\\&=\left\{\left(\frac{2n}{m+n}\right)+\left(\frac{m}{m+n}\right)\right\}^m\\&=\left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^m\end{aligned}$$

問 2　
$$\begin{aligned}R_n&=\lim_{m\to\infty}q_{m、n}\\&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{n}{m+n}\right)^m\end{aligned}$$

$\dfrac{n}{m+n}=t$ とおくと $\left(m=\dfrac{n}{t}-n\right)$、$m\to\infty$ のとき、$t\to 0$ となるので

$$\begin{aligned}R_n&=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{n}{t}-n}\\&=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^n\cdot(1+t)^{-n}\\&=e^n\end{aligned}$$

問 3　
$$\begin{aligned}S_n(k)&=\lim_{m\to\infty}p_{m、n}(k)\\&=\lim_{m\to\infty}{}_mC_k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}\\&=\lim_{m\to\infty}{}_mC_k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\cdot\left(\frac{m+n}{m}\right)^k\\&=\lim_{m\to\infty}{}_mC_k\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{n^k}{k!}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-k+1)}{m^k}\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{n^k}{k!}\cdot1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{n^k}{k!}\cdot1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{n}{m}}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{n^k}{k!}\cdot1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\cdot\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}^n}\\&=\frac{n^k}{k!\cdot e^n}\end{aligned}$$

問 4　
$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}R_n\cdot S_n(3)\right\}&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}e^n\cdot\frac{n^3}{3!\cdot e^n}\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{6N^4}\sum_{n=1}^{N}n^3\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{6N^4}\cdot\frac{1}{4}N^2(N+1)^2\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{N}\right)^2\\&=\frac{1}{24}\end{aligned}$$

3 1以上の整数 n に対して、I_n、J_n を次式で定める（ただし、e は自然対数の底である）。

$$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin(nx)|dx、J_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|}dx$$

問１　正の定数 a に対して、次の定積分の値を a を用いて表せ。答えのみでよい。

$$K(a)=\int_0^{\pi} e^{-ax}\sin x\,dx$$

問２　正の定数 b に対して、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)$ の値を b を用いて表せ。

問３　I_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

問４　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}J_n$ の値を求めよ。

解説

問１

$$K(a)=\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)'\sin x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}e^{-ax}\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)'\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)(-\sin x)dx$$
$$=\frac{e^{-a\pi}+1}{a^2}-\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi}e^{-ax}\sin x\,dx$$
$$=\frac{e^{-a\pi}+1}{a^2}-\frac{1}{a^2}\cdot K(a)$$

よって、$\dfrac{a^2+1}{a^2}\cdot K(a)=\dfrac{e^{-a\pi}+1}{a^2}$

$$\therefore\quad K(a)=\frac{e^{-ax}+1}{a^2+1}$$

別解

$$(e^{-ax}\sin x)'=-ae^{-ax}\sin x+e^{-ax}\cos x\ \cdots\cdots\cdots ①$$
$$(e^{-ax}\cos x)'=-ae^{-ax}\cos x-e^{-ax}\sin x\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①×a ＋② より

$$\{e^{-ax}(a\sin x+\cos x)\}'=-e^{-ax}(a^2+1)\sin x$$
$$\therefore\quad e^{-ax}\sin x=\left\{-\frac{e^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{a^2+1}\right\}'\cdots\cdots\cdots ③$$

よって、$K(a)=\left[-\dfrac{e^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{a^2+1}\right]_0^{\pi}$

$$=\frac{e^{-ax}+1}{a^2+1}$$

問２　$-\dfrac{b}{n}=t$ とおくと

$n\to\infty$ のとき、$t\to 0$ となる。

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)=\lim_{t\to 0}\left\{-\frac{b}{t}(1-e^t)\right\}$

$$=\lim_{t\to 0}b\cdot\frac{e^t-1}{t}$$
$$=b$$

問３　$\displaystyle I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin(nx)|dx$

$t=x-n\pi$ とおくと、$dt=dx$

$x:n\pi\to(n+1)\pi$ のとき、$t:0\to\pi$ となるので

$$I_n=\int_0^{\pi}e^{-t-n\pi}|\sin(nt+n\pi)|dt$$
$$=e^{-n\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}|\sin nt\cos n\pi+\cos nt\sin n\pi|dt$$

$\cos n\pi=(-1)^n$、$\sin n\pi=0$ より

$$I_n=e^{-n\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}|\sin nt|dt$$

$nt=u$ とおくと、$ndt=du$

$t:0\to\pi$ のとき、$u:0\to n\pi$ となるので

$$I_n=e^{-n\pi}\int_0^{n\pi}e^{-\frac{u}{n}}|\sin u|\frac{1}{n}du$$
$$=\frac{e^{-n\pi}}{n}\int_0^{n\pi}e^{-\frac{u}{n}}|\sin u|du$$
$$=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{u}{n}}|\sin u|du\quad\cdots\cdots\cdots(※)$$

$v=u-(k-1)\pi$ とおくと、$dv=du$

$u:(k-1)\pi\to k\pi$ のとき、$v:0\to\pi$ となるので

$$I_n=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}e^{-\frac{v+(k-1)\pi}{n}}|\sin\{v+(k-1)\pi\}|dv$$
$$=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}\int_0^{\pi}e^{-\frac{v}{n}}|\sin v\cos(k-1)\pi+\cos v\sin(k-1)\pi|dv$$

$\cos(k-1)\pi=(-1)^{k-1}$、$\sin(k-1)\pi=0$ より

$$I_n=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1}\cdot\int_0^{\pi}e^{-\frac{v}{n}}|\sin v|dv$$

(1) より

$$I_n=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}+1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}$$
$$=ne^{-n\pi}\cdot\frac{1-e^{-\pi}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}+1}{1+n^2}$$
$$=\frac{ne^{-n\pi}}{n^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\cdot(1-e^{-\pi})$$

別解　問１を使わない方法

(※) の続きから

$$I_n=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{u}{n}}|\sin u|du\quad\cdots\cdots\cdots(※)$$

$(k-1)\pi\leqq u\leqq k\pi$ で常に $\sin u\geqq 0$ または $\sin u\leqq 0$ より

$$I_n=\frac{e^{-n\pi}}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{u}{n}}\sin u\,du\right|$$

③ より

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{u}{n}}\sin u\,du=\left[-\frac{e^{-\frac{u}{n}}\left(\frac{1}{n}\sin u+\cos u\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$
$$=-\frac{n^2}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k\pi}{n}}\cos k\pi-e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}}\cos(k-1)\pi\right\}$$
$$=-\frac{n^2}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k\pi}{n}}(-1)^k-e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}}(-1)^{k-1}\right\}$$
$$=-\frac{n^2}{n^2+1}\cdot(-1)^k\cdot\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1}\cdot\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)$$

よって

$$I_n=\frac{e^{-n\pi}}{n}\cdot\left|\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{n^2}{n^2+1}\right)\cdot(-1)^k\cdot\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1}\cdot\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)\right|$$
$$=\frac{ne^{-n\pi}}{n^2+1}\cdot\left(1+e^{-\frac{\pi}{n}}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{ne^{-n\pi}}{n^2+1}\cdot\left(1+e^{-\frac{\pi}{n}}\right)\cdot\frac{1-e^{-\pi}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$$
$$=\frac{ne^{-n\pi}}{n^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\cdot(1-e^{-\pi})$$

問４　$0\leqq|\cos(nx)|\leqq 1$ より

$$\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1}\leqq\frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|}\leqq\frac{|\sin(nx)|}{e^x}$$

$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で成り立つので

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1}dx\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|}dx\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x}dx$$
$$\therefore\quad\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1}dx\leqq J_n\leqq I_n$$
$$\therefore\quad e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1}dx\leqq e^{n\pi}J_n\leqq e^{n\pi}I_n\quad\cdots\cdots\cdots ④$$

ここで、問３より

$$e^{n\pi}I_n=\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\cdot(1-e^{-\pi})$$
$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}\cdot(1-e^{-\pi})$$

問２より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)=\pi$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{n\pi}I_n=\frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi})\quad\cdots\cdots\cdots ⑤$

また、$\dfrac{|\sin(nx)|}{e^x+1}=\dfrac{e^x}{e^x+1}\cdot e^{-x}|\sin(nx)|$

$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で、$\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ より、$\dfrac{e^x}{e^x+1}$ は単調増加となるので

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\leqq\frac{e^x}{e^x+1}$$

$e^{-x}|\sin(nx)|\geqq 0$ より

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{-x}|\sin(nx)|\leqq\frac{e^x}{e^x+1}\cdot e^{-x}|\sin(nx)|$$
$$\therefore\quad\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{-x}|\sin(nx)|dx\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(n\pi)|}{e^x+1}dx$$
$$\therefore\quad\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}I_n\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(n\pi)|}{e^x+1}dx$$
$$\therefore\quad\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n\leqq e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(n\pi)|}{e^x+1}dx$$

よって、④ より

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n \leqq e^{n\pi}J_n \leqq e^{n\pi}I_n$$

⑤と、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^{n\pi}}}\cdot e^{n\pi}I_n=\frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi})$ より

はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}e^{n\pi}J_n=\frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi})$$

4　k を正の定数とする。O を原点とする座標空間において、zx 平面内の曲線 $C_1: z^2-x^2=1\ (z>0)$、および xy 平面内の楕円 $C_2: k^2x^2+\dfrac{k^2}{k^2+1}y^2=1$ を考える。zx 平面内の C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2})$（ただし、$t\geqq 0$）における C_1 の接線を L_1 とし、L_1 と直線 $x=z$ の交点を Q、L_2 と直線 $x=-z$ の交点を R とする。また、楕円 C_2 の焦点のうち y 座標が正の点を F とし、座標空間において直線 L_1 と点 F を通る平面を π とする。平面 π と xy 平面の交線を L_2 とし、直線 L_2 と楕円 C_2 の相違なる２つの交点を S、T とする。このとき、以下の各問いに答えよ。ただし、空間内の相違なる２点 X、Y に対して、XY が線分 XY の長さを表す。

問１　次の方程式が zx 平面内の直線 L_1 を表すように、$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を t を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}}\,z=1$$

問２　次の方程式が平面 π を表すように $\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な式を k を用いて表せ。答えのみでよい。ただし、$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には問１で求めた式が入る。

$$\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{ウ}}\,y+\boxed{\text{イ}}\,z=1$$

問３　QR を t を用いて表せ。また、ST を t、k を用いて表せ。答えのみでよい。

問４　0 以上の実数 t に対して $f_k(t)=\dfrac{\mathrm{ST}}{\mathrm{QR}}$ と定める。$f_k(t)$ を t の関数と考えたとき、$f_k(t)$ が極値をとるための k に対する必要十分条件を求めよ。

（解説）

問１　C_1 上の点Pにおける接線 L_1 は

$$\sqrt{1+t^2}\,z-tx=1$$

$$\therefore\quad -tx+\sqrt{1+t^2}\,z=1$$

問２　C_2 より、$\dfrac{x^2}{\frac{1}{k^2}}+\dfrac{y^2}{\frac{k+1}{k^2}}=1$

よって、焦点 F は、$\left(0,\ \sqrt{\dfrac{k+1}{k^2}-\dfrac{1}{k^2}},\ 0\right)=\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{k}},\ 0\right)$ となる　………①

問1より、平面 π は、$-tx+by+\sqrt{1+t^2}\,z=1$ とおけ、平面 π は F を通るので

$$\frac{b}{\sqrt{k}}=1$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{k}$$

よって、平面 π の方程式は、$-tx+\sqrt{k}\,y+\sqrt{1+t^2}\,z=1$ となる　………②

別解　①の続き

L_1 をx軸、z 軸の交点はそれぞれ、$\left(-\dfrac{1}{t},\ 0,\ 0\right)$、$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ である。

よって、平面 π の方程式は

$$\frac{x}{-\frac{1}{t}}+\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{k}}}+\frac{z}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=1$$

$$\therefore\quad -tx+\sqrt{k}\,y+\sqrt{1+t^2}\,z=1$$

となる。

問３　L_1 と$x=z$ との交点が Q より

$$-tx+\sqrt{1+t^2}\,x=1$$

$$\therefore\quad (\sqrt{1+t^2}-t)x=1$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{1+t^2}+t$$

よって、Q の座標は、$(\sqrt{1+t^2}+t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2}+t)$

また、L_1 と$x=-z$ との交点が R より

$$tz+\sqrt{1+t^2}\,z=1$$

$$\therefore\quad (\sqrt{1+t^2}+t)x=1$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{1+t^2}-t$$

よって、R の座標は、$(\sqrt{1+t^2}-t,\ 0,\ -\sqrt{1+t^2}+t)$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\sqrt{\{(\sqrt{1+t^2}-t)-(\sqrt{1+t^2}+t)\}^2+\{(-\sqrt{1+t^2}+t)-(\sqrt{1+t^2}+t)\}^2}\\&=\sqrt{4t^2+4(1+t^2)}\\&=2\sqrt{1+2t^2}\end{aligned}$$

平面 π と xy 平面との交線が L_2 より、②に $z=0$ を代入して

$$L_2:\ -tx+\sqrt{k}\,y=1$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{\sqrt{k}}(tx+1)$$

C_2 との交点より

$$k^2x^2+\frac{k^2}{k^2+1}\cdot\frac{1}{k}(tx+1)^2=1$$

$$\therefore\quad k(k^2+k+t^2)x^2-2ktx-1=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

③はFを通るので、C_2 と異なる２点で交わるので、その交点の x 座標を α、$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{ST}&=\sqrt{1+\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^2}\cdot|\beta-\alpha|\\&=\sqrt{\frac{k+t^2}{k}}\,|\beta-\alpha|\end{aligned}$$

ここで、α、β は③の２解より

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=\frac{\sqrt{(-2kt)^2-4\cdot k(k^2+k+t^2)\cdot(-1)}}{k(k^2+k+t^2)}\\&=\frac{2\sqrt{k(kt^2+k^2+k+t^2)}}{k(k^2+k+t^2)}\\&=\frac{2\sqrt{k(1+k)(k+t^2)}}{k(k^2+k+t^2)}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{ST}&=\sqrt{\frac{k+t^2}{k}}\cdot\frac{2\sqrt{k(1+k)(k+t^2)}}{k(k^2+k+t^2)}\\&=\frac{2(k+t^2)\sqrt{1+k}}{k(k^2+k+t^2)}\end{aligned}$$

参考

・$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の２解を α、$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

となる。

・$y=mx+n$ の $\alpha\leqq x\leqq\beta$ における線分の長さを L とすると

$$L=\sqrt{1+m^2}\,|\beta-\alpha|$$

となる。

問４　
$$\begin{aligned}f_k(t)&=\frac{(k+t^2)\sqrt{1+k}}{k(k^2+k+t^2)\sqrt{1+2t^2}}\\&=\frac{\sqrt{1+k}}{k}\cdot\frac{k+t^2}{(k^2+k+t^2)\sqrt{1+2t^2}}\end{aligned}$$

ここで、$g_k(t)=\dfrac{k+t^2}{(k^2+k+t^2)\sqrt{1+2t^2}}$ とおくと

$$\begin{aligned}g_k{}'(t)&=\frac{2t\cdot(k^2+k+t^2)\sqrt{1+2t^2}-(k+t^2)\left\{2t\cdot\sqrt{1+2t^2}+(k^2+k+t^2)\cdot\dfrac{2t}{\sqrt{1+2t^2}}\right\}}{(k^2+k+t^2)^2(1+2t^2)}\\&=\frac{2t\cdot(k^2+k+t^2)(1+2t^2)-(k+t^2)\{2t(1+2t^2)+(k^2+k+t^2)\cdot 2t\}}{(k^2+k+t^2)^2(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2t[(k^2+k+t^2)(1+2t^2)-(k+t^2)(k^2+k+3t^2+1)]}{(k^2+k+t^2)(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2t\{-t^4+k(k-2)t^2-k^3\}}{(k^2+k+t^2)(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$t>0$ より、$\dfrac{2t}{(k^2+k+t^2)(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}>0$

よって、$-t^4+k(k-2)t^2-k^3=-\left\{t^2-\dfrac{k(k-2)}{2}\right\}^2+\dfrac{k^2(k-2)^2}{4}-k^3$ が

$t>0$ で符号変化する条件は、$k>0$ より、$-k^3<0$ を考慮して

$$\begin{cases}\dfrac{k^2(k-2)^2}{4}-k^3>0\\[2mm]\dfrac{k(k-2)}{2}>0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}k^2-8k+4>0\\k(k-2)>0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}k<4-2\sqrt{3}、4+2\sqrt{3}<k\\k<0、2<k\end{cases}$$

$$\therefore\quad 4+2\sqrt{3}<k$$