◇２０２４年度杏林大学医学部

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{キ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ。

原点をOとする座標平面上に円 $C: x^2+y^2=10$ と直線 $\ell: y=ax-4a+2$ がある。ただし、a は実数の定数とする。

(a) 直線 ℓ は、その傾き a の値によらず、定点 $\mathrm{F}\left(\boxed{\text{ア}}、\boxed{\text{イ}}\right)$ を通る。

定数 a を変化させたとき、円 C と接するような直線 ℓ は2本存在する。これらの直線と円 C との接点をP、Qとすると、短い方の弧PQの長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ である。

(b) 直線 ℓ が円 C と異なる2点で交わるとき、その交点をR、Sとする。線分RSの中点をMとすると、$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\boxed{\text{カ}}$ が成り立つ。定数 a を変化させたとき、点Mが描く軌跡は原点Oを通り $\boxed{\text{キ}}$ の一部である。

また、定数 a を変化させた場合に $\triangle\mathrm{ORS}$ の面積が最大となるのは、原点と直線 ℓ の距離が $\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であり、$a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\pm\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シス}}}$ のときである。

① 点Fを焦点とする放物線　② 点Fを中心とする円
③ 線分FOを直径とする円　④ 線分FOを一辺にもつ正三角形の外接円
⑤ 点Fを焦点の1つとする楕円　⑥ 線分FOを長軸とする楕円
⑧ 点Fを焦点の1つとする双曲線　⑦ 2点F、Oを頂点とする双曲線

(c) 点 $\mathrm{T}(u、v)$ を直線 ℓ と楕円 $E: \dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共有点とする。

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{u}{\sqrt{10}}、\dfrac{v}{2}\right)$、$\vec{\beta}=(a\sqrt{10}、-2)$ とおくと、点Tが直線 ℓ 上にあることから

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\boxed{\text{セ}}\,a-\boxed{\text{ソ}}$ が成立する。また、点Tが楕円 E 上にあることから

$|\vec{\alpha}|=\boxed{\text{タ}}$ がいえる。

$-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\leqq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leqq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ より、直線 ℓ と楕円 E が共有点をもつ a の範囲は

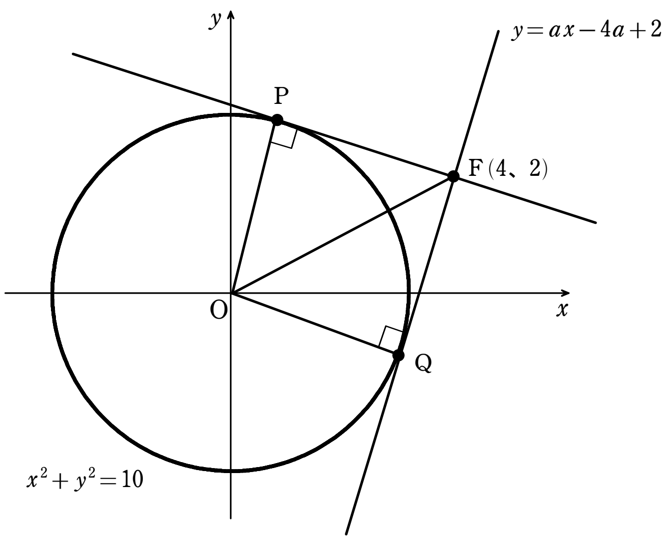
$\boxed{\text{チ}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ とわかる。

$a=\boxed{\text{チ}}$ のとき、直線 ℓ は楕円 E と点 $\left(\boxed{\text{ト}}、\boxed{\text{ナ}}\right)$ で接し、直線 ℓ が円 C によって切り取られる線分RSの長さは $\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

(解説)

(a) 直線 ℓ より、$y=a(x-4)+2$

よって、a の値によらず通る点Fの座標は $(4、2)$



$\mathrm{OP}=\sqrt{10}$、$\mathrm{OF}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ で $\angle\mathrm{OPF}=\dfrac{\pi}{2}$ より

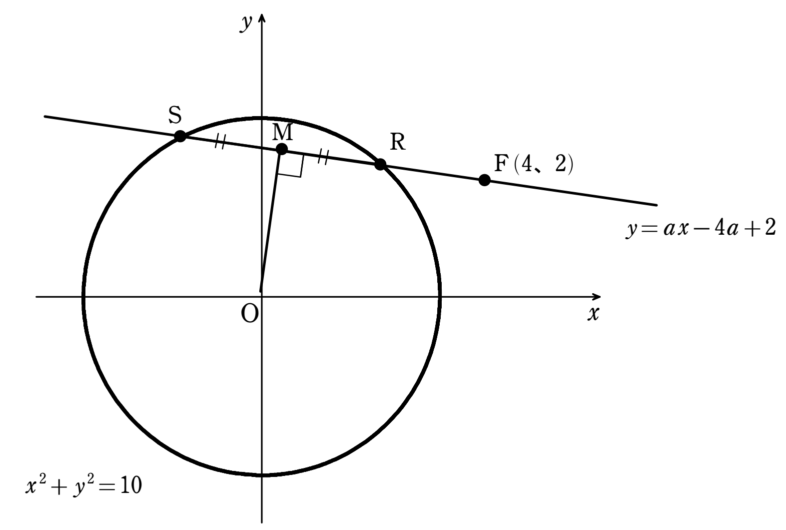
$$\mathrm{PF}=\sqrt{20-10}=\sqrt{10}$$

よって、$\triangle\mathrm{OPF}$ が直角二等辺三角形となるので、$\angle\mathrm{FOP}=\dfrac{\pi}{4}$

これより、$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$ となるので

$$\text{弧PQ}=2\pi\cdot\sqrt{10}\times\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}=\frac{\sqrt{10}}{2}\pi$$

(b)



a の値によらず、常に $\mathrm{OM}\perp\mathrm{FM}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FM}}=0$

よって、点Mの軌跡は、O、Fを直径の両端とする円（ただし、円 C の内部）となる。⇒③

また、$\triangle\mathrm{ORS}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OR}\cdot\mathrm{OS}\cdot\sin\angle\mathrm{ROS}\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sin\angle\mathrm{ROS}\\&=5\sin\angle\mathrm{ROS}\end{aligned}$$

よって、$\triangle\mathrm{ORS}$ の面積が最大となるのは、$\angle\mathrm{ROS}=\dfrac{\pi}{2}$ のときである。

このとき、$\angle\mathrm{ROM}=\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{OM}&=\mathrm{OR}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\&=\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

よって、Oから ℓ までの距離が $\sqrt{5}$ より

$$\frac{|-4a+2|}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ (-4a+2)^2=5(1+a^2)$

$\therefore\ 11a^2-16a-1=0$

$\therefore\ a=\dfrac{8\pm5\sqrt{3}}{11}$

(c) 点 $\mathrm{T}(u、v)$ が直線 ℓ と楕円 E 上より

$$\begin{cases}v=au-4a+2\cdots\cdots\text{①}\\ \dfrac{u^2}{10}+\dfrac{v^2}{4}=1\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{u}{\sqrt{10}}、\dfrac{v}{2}\right)$、$\vec{\beta}=(a\sqrt{10}、-2)$ より

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}&=\begin{pmatrix}\dfrac{u}{\sqrt{10}}\\ \dfrac{v}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\sqrt{10}\\-2\end{pmatrix}\\&=au-2v\\&=au-(au-4a+2)\quad(\because\ \text{①})\\&=4a-2\end{aligned}$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\frac{u^2}{10}+\frac{v^2}{4}}=1\quad(\because\ \text{②})$$

$-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\leqq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leqq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ より、直線 ℓ と楕円 E が共有点をもつ a の範囲は

$$-1\cdot\sqrt{10a^2+4}\leqq4a-2\leqq1\cdot\sqrt{10a^2+4}$$

$\therefore\ (4a-2)^2\leqq10a^2+4$

$\therefore\ 6a^2-16a\leqq0$

$\therefore\ a(3a-8)\leqq0$

$\therefore\ 0\leqq a\leqq\dfrac{8}{3}$

$a=0$ のとき、直線 ℓ は $y=2$ より、楕円 E と点 $(0、2)$ で接する。

このとき、直角三角形OMRより

$$\begin{aligned}\mathrm{RS}&=2\mathrm{MS}\\&=2\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}\\&=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

2 $\boxed{\text{セ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ。

実数 x の関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}-1$ に対し、座標平面上の $y=f(x)$ のグラフを C とする。また、実数の媒介変数 s を用いて次式で表される座標平面上の曲線を Γ とする。

$$x=s-1+\frac{2}{e^{2s}+1}\text{、}\ y=\frac{2e^{s}}{e^{2s}+1}-1$$

ただし、e は自然対数の底である。

(a)　$s=\log_e 3$ としたときの曲線 Γ 上の点を P とする。

点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}+\log_e 3\text{、}-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right)$ であり、この点における曲線 Γ の法線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}(x-\log_e 3)+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

とかける。

(b)　x 座標が $\log_e 3$ である C 上の点を Q とする。点 Q の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり、

$f'(\log_e 3)=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ が成り立つ。直線 ℓ は、点 Q における曲線 C の $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$ の選択群

⓪　法線　　②　接線　　③　接線と $\dfrac{\pi}{6}$ の角度で交わる直線

④　接線と $\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わる直線　　⑤　接線と $\dfrac{\pi}{3}$ の角度で交わる直線

(c)　原点 O と点 Q を結ぶ曲線 C の長さを d とすると、$d=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり、

$\dfrac{d}{\mathrm{PQ}}=\boxed{\text{チ}}$ が成り立つ。

解説

(a)　$s=\log_e 3$ より、$e^{s}=3$ から

$$\begin{cases} x=\log_e 3-1+\dfrac{2}{3^2+1}=-\dfrac{4}{5}+\log_e 3 \\ y=\dfrac{2\cdot 3}{3^2+1}-1=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

よって、$\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{5}+\log_e 3\text{、}-\dfrac{2}{5}\right)$

また、$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=1-\dfrac{4e^{2s}}{(e^{2s}+1)^2} \\ \dfrac{dy}{ds}=-\dfrac{2e^{s}(e^{2s}-1)}{(e^{2s}+1)^2} \end{cases}$ より、$e^{s}=3$ から、$\left(\dfrac{dx}{ds}\text{、}\dfrac{dy}{ds}\right)=\left(\dfrac{64}{100}\text{、}-\dfrac{48}{100}\right)$

よって、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-48}{64}=-\dfrac{3}{4}$

これより、P における法線 ℓ は

$$y=\frac{4}{3}\left\{x-\left(-\frac{4}{5}+\log_e 3\right)\right\}-\frac{2}{5}$$

$$\therefore\quad y=\frac{4}{3}\left\{(x-\log_e 3)+\frac{4}{5}\right\}-\frac{2}{5}$$

$$\therefore\quad y=\frac{4}{3}(x-\log_e 3)+\frac{2}{3}$$

(b)　点 Q の y 座標は

$$f(\log_e 3)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-1=\frac{2}{3}$$

また、$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}-\dfrac{1}{2}e^{-x}$ より

$$f'(\log_e 3)=\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

よって、$y=f(x)$ 上の点 Q における接線は

$$y=\frac{4}{3}(x-\log_e 3)+\frac{2}{3}$$

これは、点 P における法線 ℓ と一致するので、直線 ℓ は $y=f(x)$ 上の点 Q における接線である。（⇒ ②）

(c)　$d=\displaystyle\int_0^{\log_e 3}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ より

$$1+\{f'(x)\}^2=1+\left(\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2$$

よって、$d=\displaystyle\int_0^{\log_e 3}\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\log_e 3}(e^{x}+e^{-x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^{x}-e^{-x}\Big]_0^{\log_e 3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}\log_e 3\\ \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{5}+\log_e 3\\ -\dfrac{2}{5}\end{pmatrix}$

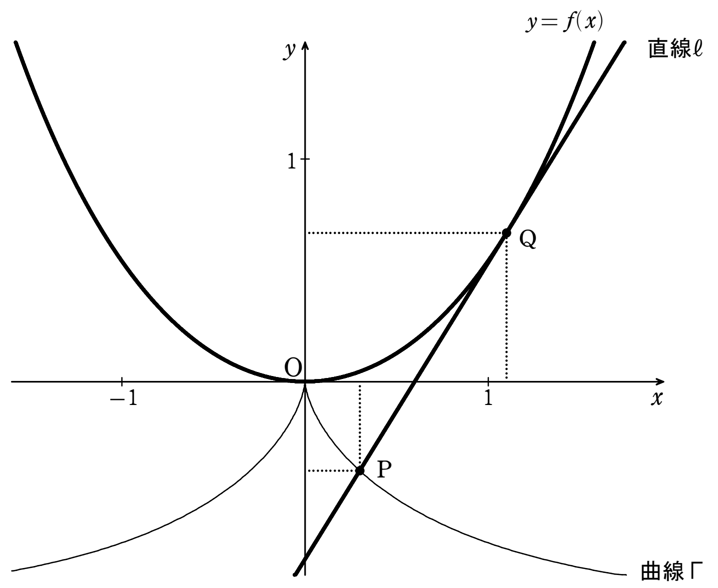
$=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{6}{15}\end{pmatrix}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{15}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{3}$$

よって、$\dfrac{d}{\mathrm{PQ}}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=1$

参考　位置関係は以下のようになる。



3 $\boxed{チ}$ と $\boxed{ツ}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものそれぞれを一つずつ選べ。

原点 O とする複素数平面上に 2 点A(α)、B(β)がある。ただし、i を虚数単位として $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$、$\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であり、$\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とする。$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表し、複素数 z の偏角 $\arg z$ の範囲は$0\leqq \arg z<2\pi$ とする。

(a) γ の実部を s、虚部を t とすると

$$s=\frac{\sqrt{\boxed{ア}}+\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}},\quad t=\frac{\sqrt{\boxed{ア}}-\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

$$|\gamma|=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}},\quad \arg\gamma=\frac{\pi}{\boxed{カキ}}$$

が成り立つ。

また、2 点 O、B を通る直線に関して点 A と対称な点 D(δ)について

$$\arg\frac{\delta-\alpha}{\beta}=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\pi$$

が成り立ち、

$$\delta=\alpha\times\frac{i+\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$$

を満たす。

(b) 自然数 n に対して γ^n が純虚数となる最小の n は $\boxed{シ}$ である。

また、$|\gamma^{-n}|>2024$ を満たす最小の n は $\boxed{スセ}$ である。

(c) 2 点 O、A を通る直線に関して点 P(z) と対称な点を表す複素数を $\dot{z}$ と表記する。
自然数 n について、次の式で表される複素数平面上の点列 $\{z_n\}$ を考える。

$$z_1=\beta、z_{n+1}=z_n+\gamma(\dot{z}_n-z_n)\qquad (ただし、n=1、2、3、\cdots\cdots)$$

点列 $\{z_n\}$ は複素数平面内で実軸と $\dfrac{\pi}{\boxed{ソ}}$ の角度で交わる直線上に存在する。

また、$\arg z_n+\arg\dot{z}_n=\dfrac{\pi}{\boxed{タ}}$ であり、z_n の極形式を考えると任意の自然数 n に対して $\dot{z}_n=\boxed{チ}$ と表せるので、点列 $\{z_n\}$ は次式を満たす。

$$\dot{z}_{n+1}=\dot{z}_n+\boxed{ツ}\times(z_n-\dot{z}_n)\qquad (ただし、n=1、2、3、\cdots\cdots)$$

自然数 n に対し $|\dot{z}_n-z_n|$ は公比 $\boxed{テト}s+\boxed{ナ}$ の等比数列（ただし、s は γ の実部）をなし、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\dot{z}_n-z_n|=\boxed{ニ}$ となる。

以上から、

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\frac{\pi}{\boxed{ヌ}},\quad \lim_{n\to\infty}|z_n|=\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}s}$$

とわかる。

$\boxed{チ}$ の解答群

① iz_n　② $-z_n$　③ $-iz_n$　④ $\dfrac{1}{z_n}$　⑤ $\overline{z_n}$

⑥ $i\,\overline{z_n}$　⑦ $-\overline{z_n}$　⑧ $-i\,\overline{z_n}$　⑨ $(\overline{z_n})^{-1}$　⓪ $i(\overline{z_n})^{-1}$

$\boxed{ツ}$ の解答群

① γ　② $i\gamma$　③ $(-\gamma)$　④ $(-i\gamma)$　⑤ $\overline{\gamma}$　⑥ $i\overline{\gamma}$　⑦ $(-\overline{\gamma})$　⑧ $(-i\overline{\gamma})$

解説

(a) $\gamma=\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)}$

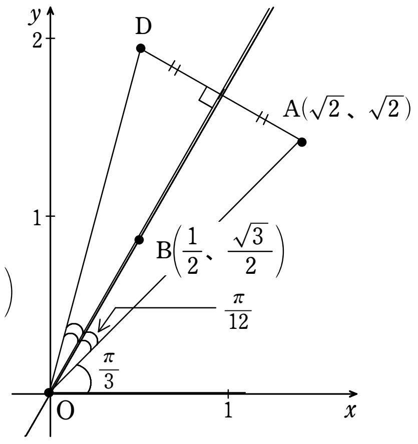
$=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$

よって、$s=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$、$t=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

また、$\alpha=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\beta=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ より

$|\gamma|=\dfrac{1}{2}$、$\arg\gamma=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$



点 D は直線 OB に関して点 A と対称より、直線OBと直線AD は直交する。

よって、$\arg\dfrac{\delta-\alpha}{\beta}=\dfrac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{12}$ より、点 A を原点周りに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転させた点が D となるので

$\delta=\alpha\times\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\alpha\times\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$

(b) $\gamma=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ より

$\gamma^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{12}+i\sin\dfrac{n\pi}{12}\right)$

これが純虚数となるための条件は

$$\begin{cases}\cos\dfrac{n\pi}{12}=0\\[2mm] \sin\dfrac{n\pi}{12}\neq 0\end{cases}$$

$\therefore\ \dfrac{n\pi}{12}=\dfrac{k\pi}{2}$　(k は整数)

$\therefore\ n=6k$

最小の n は、$k=1$ のときで、$n=6$

また、$\gamma^{-n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n}\left\{\cos\left(-\dfrac{n\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{12}\right)\right\}$ より、$|\gamma^{-n}|>2024$ から

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{12}\right)\right\}\right|>2024$$

$\therefore\ |2^n|\cdot\left|\cos\left(-\dfrac{n\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{12}\right)\right|>2024$

$\therefore\ 2^n>2024$

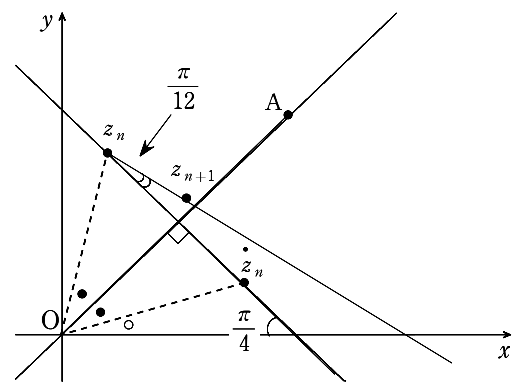
$2^{10}=1024$、$2^{11}=2048$ より、最小の n は、$n=11$

(c) $z_{n+1}=z_n+\gamma(\dot{z}_n-z_n)$ より

$z_{n+1}-z_n=\gamma(\dot{z}_n-z_n)$

$\therefore\ \dfrac{z_{n+1}-z_n}{\dot{z}_n-z_n}=\gamma$

これより、z_n を回転の中心として $\dot{z}_n$ を $\dfrac{\pi}{12}$ 回転して $\dfrac{1}{2}$ 倍した点が z_{n+1} より下の図のようになる。$\left(\arg z_1=\arg\beta=\dfrac{\pi}{3}\right.$ より、z_n は直線OA の上側にある$\left.\right)$



よって、点列 $\{z_n\}$ は複素数平面内で実軸と $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$ の角度で交わる直線上に存在する。

また、図のように $\arg z_n=\circ$、$\arg\dot{z}_n=2\bullet+\circ$ とおくと、$\bullet+\circ=\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\arg z_n+\arg\dot{z}_n=\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots ①$$

となる。

z_n を原点周りに $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転したあと、実軸対称に移動した点が $\dot{z}_n$ より

$\dot{z}_n=\overline{\left[z_n\times\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}\right]}$

$\therefore\ \dot{z}_n=\overline{-iz_n}$

$\therefore\ \dot{z}_n=i\,\overline{z_n}$　(⇒ ⑥)

$\therefore\ i\dot{z}_n=-\overline{z_n}$

$\therefore\ \overline{i\dot{z}_n}=-\overline{\overline{z_n}}$

$\therefore\ -i\,\overline{\dot{z}_n}=-z_n$

$\therefore\ z_n=i\,\overline{\dot{z}_n}$

これらを $z_{n+1}=z_n+\gamma(\dot{z}_n-z_n)\ \cdots\cdots ②$ に代入すると

$i\,\overline{\dot{z}_{n+1}}=i\,\overline{\dot{z}_n}+\gamma(i\,\overline{z_n}-i\,\overline{\dot{z}_n})$

$\therefore\ \overline{\dot{z}_{n+1}}=\overline{\dot{z}_n}+\gamma(\overline{z_n}-\overline{\dot{z}_n})$

$\therefore\ \dot{z}_{n+1}=\dot{z}_n+\overline{\gamma}\,(z_n-\dot{z}_n)\ \cdots\cdots ③$　(⇒ ⑤)

③−② より

$\dot{z}_{n+1}-z_{n+1}=\dot{z}_n-z_n+\overline{\gamma}\,(z_n-\dot{z}_n)-\gamma(\dot{z}_n-z_n)$

$\therefore\ \dot{z}_{n+1}-z_{n+1}=\{1-(\gamma+\overline{\gamma})\}(\dot{z}_n-z_n)$

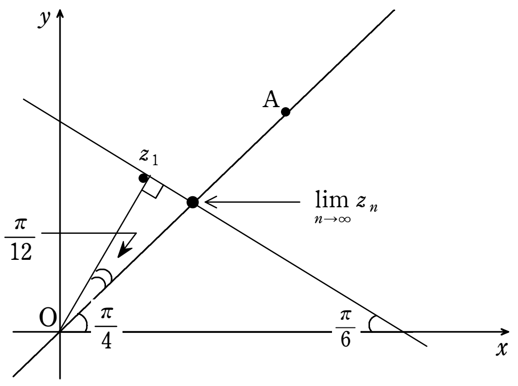
よって、$|\dot{z}_n-z_n|$ は 公比 $1-(\gamma+\overline{\gamma})=-2s+1$ の等比数列となる。

ここで、$-2s+1=1-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ で、$0<\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}<1$ より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\dot{z}_n-z_n|=0$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\dot{z}_n-z_n)=0$ となるため、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\arg\dot{z}_n-\lim_{n\to\infty}\arg z_n=0$ となる。

また、① より、$\lim_{n\to\infty} arg\,\dot{z}_n+\lim_{n\to\infty} arg z_n=\frac{\pi}{2}$ となるので、連立して、$\lim_{n\to\infty} arg z_n=\frac{\pi}{4}$

これより、z_n は、直線 OA と点列 $\{z_n\}$ が存在する直線との交点に近づくことが分かる。



$\lim_{n\to\infty}|z_n|=u$ とおくと

$$\frac{|z_1|}{u}=\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\therefore\quad u=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}$$

$s=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}$ より、$\cos\frac{\pi}{12}=2s$

よって、$u=\frac{1}{2s}$