1 k を実数の定数とすろとき、$f(x)=x^2-2kx-2k^2+2k+1$ の $-3\leqq x\leqq 1$ における最大値と最小値は、 k が以下のは範囲にあるとき、

$k<\boxed{アイ}$ のとき、　最大値 $\boxed{ウ}$ 最小値 $\boxed{エ}$

$\boxed{アイ}<k<\boxed{オカ}$ のとき、　最大値 $\boxed{キ}$ 最小値 $\boxed{ク}$

$\boxed{オカ}<k<\boxed{ケ}$ のとき、　最大値 $\boxed{コ}$ 最小値 $\boxed{サ}$

$\boxed{ケ}<k$ のとき、　最大値 $\boxed{シ}$ 最小値 $\boxed{ス}$　である。

ただし、$\boxed{ウ}$、$\boxed{エ}$、$\boxed{キ}$、$\boxed{ク}$、$\boxed{コ}$、$\boxed{サ}$、$\boxed{シ}$、$\boxed{ス}$ に当てはまるものは下の⓪ ～ ④ の中から 1 つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

⓪ $f(-3)$　① $f(-1)$　② $f(0)$　③ $f(1)$　④ $f(k)$

2 次方程式 $x^2-2kx-2k^2+2k+1=0$ の実数解が $-3<x\leqq 1$ に存在するような k の値の範囲は

$\boxed{セソ}\ \boxed{タ}\ k\ \boxed{チ}\ \dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$、$\boxed{ナ}\ \boxed{ニ}\ k\ \boxed{ヌ}\ \boxed{ネ}$ である。

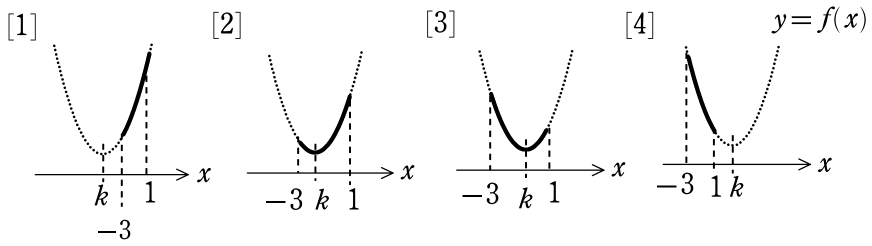
ただし、$\boxed{タ}$、$\boxed{チ}$、$\boxed{ニ}$、$\boxed{ヌ}$ に当てはまるものは下の⓪ ～ ② の中から 1 つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

⓪ $=$　① $<$　② $\leqq$

(解説)

(1) $f(x)=x^2-2kx-2k^2+2k+1$

$=(x-k)^2-3k^2+2k+1$



[1] $k<-3$ のとき、最大値 $f(1)$、最小値 $f(-3)$

[2] $-3<k<-1$ のとき、最大値 $f(1)$、最小値 $f(k)$

[3] $-1<k<1$ のとき、最大値 $f(-3)$、最小値 $f(k)$

[4] $1<k$ のとき、最大値 $f(-3)$、最小値 $f(1)$

(2)

(ⅰ) $k\leqq -3$ のとき

$-3<x\leqq 1$ で $f(x)=0$ が解をもつ条件は、$\begin{cases} f(-3)<0 \\ f(1)\geqq 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -2k^2+8k+10<0 \\ -2k^2+2\geqq 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -2(k+1)(k-5)<0 \\ -2(k+1)(k-1)\geqq 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} k<-1、5<k \\ -1\leqq k\leqq 1 \end{cases}$

よって、共通部分が存在しないので、不適。

(ⅱ) $-3<k<1$ のとき

$-3<x\leqq 1$ で $f(x)=0$ が解をもつ条件は、$\begin{cases} f(k)\leqq 0 \\ f(1)\geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(k)\leqq 0 \\ f(-3)>0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -3k^2+2k+1\leqq 0 \\ -2k^2+2\geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} -3k^2+2k+1\leqq 0 \\ -2k^2+8k+10>0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -(3k+1)(k-1)\leqq 0 \\ -2(k+1)(k-1)\geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} -(3k+1)(k-1)\leqq 0 \\ -2(k+1)(k-5)>0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} k\leqq -\dfrac{1}{3}、1\leqq k \\ -1\leqq k\leqq 1 \end{cases}$ または $\begin{cases} k\leqq -\dfrac{1}{3}、1\leqq k \\ -1<k<5 \end{cases}$

$\therefore\ -1\leqq k\leqq -\dfrac{1}{3}$ または $-1<k\leqq -\dfrac{1}{3}$、$1\leqq k<5$

よって、$-3<k<1$ より、$-1\leqq k\leqq -\dfrac{1}{3}$

(ⅲ) $k\geqq 1$ のとき

$-3<x\leqq 1$ で $f(x)=0$ が解をもつ条件は、$\begin{cases} f(-3)>0 \\ f(1)\leqq 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -2(k+1)(k-5)>0 \\ -2(k+1)(k-1)\leqq 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -1<k<5 \\ k\leqq -1、1\leqq k \end{cases}$

$\therefore\ 1\leqq k<5$

(ⅰ)～(ⅲ)より、$-1\leqq k\leqq -\dfrac{1}{3}$、$1\leqq k<5$

別解　$-3<x\leqq 1$ で $f(x)=0$ が少なくと 1 個実数解をもつ条件は

(ⅰ) $f(-3)>0$ かつ、$f(1)\geqq 0$ のとき

つまり、$-1<k<5$ かつ $-1\leqq k\leqq 1$

よって、$-1<k\leqq 1$ のとき

$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$\begin{cases} D\geqq 0 \\ -3<k\leqq 1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 3k^2-2k-1\geqq 0 \\ -3<k\leqq 1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} (3k+1)(k-1)\geqq 0 \\ -3<k\leqq 1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} k\leqq -\dfrac{1}{3}、1\leqq k \\ -3<k\leqq 1 \end{cases}$

$-1<k\leqq 1$ より、$-1<k\leqq -\dfrac{1}{3}$、$k=1$

(ⅱ) $f(-3)\cdot f(1)<0$ のとき

つまり、$-2(k+1)(k-5)\cdot\{-2(k+1)(k-1)\}<0$

よって、$(k+1)^2(k-5)(k-1)<0$

$\therefore\ 1<k<5$ のとき

このとき、必ず $-3<x\leqq 1$ で 1 個実数解をもつので適する。

(ⅲ) $f(1)=0$ のとき

つまり、$-2(k-1)(k+1)=0$

よって、$k=\pm 1$ より

$k=1$ のとき

$f(x)=x^2-2x+1=0$

$\therefore\ (x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

よって、$-3<x\leqq 1$ で 1 個実数解をもつので適する。

$k=-1$ のとき

$f(x)=x^2+2x-3=0$

$\therefore\ (x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3、1$

よって、$-3<x\leqq 1$ で 1 個実数解をもつので適する。

(ⅳ) $f(-3)=0$ のとき

つまり、$-2(k+1)(k-5)=0$

よって、$k=-1、5$

$k=-1$ のとき

(ⅳ)より、適する。

$k=5$ のとき

$f(x)=x^2-10x-39=0$

$\therefore\ (x+3)(x-13)=0$

$\therefore\ x=-3、13$

よって、$-3<x\leqq 1$ で 実数解をもたないので不適。

(ⅰ)～(ⅳ)より、$-1\leqq k\leqq -\dfrac{1}{3}$、$1\leqq k<5$

2 複素数 $z=-\sqrt{2}-\sqrt{6}+(\sqrt{2}-\sqrt{6})i$ について

(1) z^2 の値は、$z^2=\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}+\boxed{\text{ヒ}}\,i$ である。

(2) z を極形式で表すと、$z=\boxed{\text{フ}}\left(\cos\dfrac{\boxed{\text{ヘホ}}}{\boxed{\text{マミ}}}\pi+i\sin\dfrac{\boxed{\text{ヘホ}}}{\boxed{\text{マミ}}}\pi\right)$ である。

ただし、偏角は 0 以上 2π 未満とする。

(3) z^8 の値は、$z^8=\boxed{\text{ム}}\,\boxed{\text{メモ}}\left(\boxed{\text{ヤユ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}\,i\right)$ である。

(4) n を自然数とする。$(1-i)z^n$ が実数となる最小の n は、$n=\boxed{\text{ラ}}$ である。

解説

(1) $z=-\sqrt{2}-\sqrt{6}+(\sqrt{2}-\sqrt{6})i$ より

$$z^2=\{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+(\sqrt{2}-\sqrt{6})i\}^2$$
$$=(-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2+2(-\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})i+\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})i\}^2$$
$$=8+4\sqrt{3}+2(-2+6)i-(8-4\sqrt{3})$$
$$=8\sqrt{3}+8i$$

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

(1) より

$$z^2=8\sqrt{3}+8i$$
$$r^2(\cos\theta+i\sin\theta)=8(\sqrt{3}+i)$$
$$\therefore\quad r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=16\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって、$\begin{cases} r^2=16 \\ 2\theta=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k\text{ は整数}) \end{cases}$

$\therefore\quad \begin{cases} r=4 \\ \theta=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \end{cases}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より、$\theta=\dfrac{\pi}{12}$、$\dfrac{13}{12}\pi$

z の実部、虚部ともに負より、$z=4\left(\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$

(3)
$$z^8=4^8\cdot\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)^8$$
$$=2^{16}\cdot\left(\cos\frac{26}{3}\pi+i\sin\frac{26}{3}\pi\right)$$
$$=2^{16}\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=2^{16}\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$
$$=2^{15}\cdot(-1+\sqrt{3}\,i)$$

(4)
$$(1-i)z^n=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\cdot4^n\cdot\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)^n$$
$$=4^n\cdot\sqrt{2}\cdot\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cdot\left(\cos\frac{13}{12}n\pi+i\sin\frac{13}{12}n\pi\right)$$
$$=4^n\cdot\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{13}{12}n-\frac{1}{4}\right)\pi+i\sin\left(\frac{13}{12}n-\frac{1}{4}\right)\pi\right\}$$

これが実数となればよいので

$$\left(\frac{13}{12}n-\frac{1}{4}\right)\pi=k\pi\quad(k\text{ は整数})$$
$$\therefore\quad n=\frac{12k+3}{13}$$

n は自然数より、$k=0$ から順に代入していくと、$k=3$ で、n は初めて自然数となり、そのときの値は、$n=3$ である。

よって、最小の自然数 n は、$n=3$

3 実数 x、y、z が、

$$x+y+z=xy+yz+zx=4$$

を満たすとき、

(1) x^2yz を x だけの式で表すと、$x^2yz=x^4-\boxed{\text{リ}}\,x^3+\boxed{\text{ル}}\,x^2$ である。

(2) x のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{レ}}\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}}$ である。

(3) x^2yz のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{あ}}\leqq x^2yz\leqq\dfrac{\boxed{\text{いうえ}}}{\boxed{\text{おか}}}$ であり、$x^2yz=\boxed{\text{あ}}$ となる $(x,\ y,\ z)$ の組は $\boxed{\text{き}}$ 組あり、$x^2yz=\dfrac{\boxed{\text{いうえ}}}{\boxed{\text{おか}}}$ となる $(x,\ y,\ z)$ の組は $\boxed{\text{く}}$ 組ある。

解説

(1) $x+y+z=4$ より、$y+z=4-x$ …… ①

$xy+yz+zx=4$ より、$yz=4-x(y+z)$

① を代入して、$yz=4-x(4-x)$

$$=x^2-4x+4\ \cdots\cdots ②$$

よって、$x^2yz=x^2(x^2-4x+4)$

$$=x^4-4x^3+4x^2$$

別解　$xyz=k$ とおくと、実数 x、y、z は t に関する3次方程式

$$t^3-4t^2+4t-k=0$$

の実数解である。

よって、$x^3-4x^2+4x-k=0$ が成り立つので、$k=x^3-4x^2+4x$ より

$$x^2yz=kx$$
$$=x^4-4x^3+4x^2$$

(2) ①、② より、実数 y、z は t に関する 2 次方程式

$$t^2-(4-x)t+x^2-4x+4=0\ \cdots\cdots ③$$

の実数解である。

よって、判別式を D とすると

$$D=(4-x)^2-4(x^2-4x+4)\geqq0$$
$$\therefore\quad -3x^2+8x\geqq0$$
$$\therefore\quad -x(3x-8)\geqq0$$
$$\therefore\quad 0\leqq x\leqq\frac{8}{3}$$

(3) $x^2yz=x^4-4x^3+4x^2=f(x)$ とおくと

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x$$
$$=4x(x-1)(x-2)\ \text{より}$$

増減表は、以下のようになる。

x	0		1		2		$\frac{8}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	$\frac{256}{81}$

よって、x^2yz のとりうる値の範囲は、$0\leqq x^2yz\leqq\dfrac{256}{81}$

(ｉ) $x^2yz=0$ のとき、つまり、$x=0$、2 のとき

・$x=0$ のとき

③ より、$t^2-4t+4=0$

$\therefore\quad (t-2)^2=0$

$\therefore\quad t=2$

よって、$y=z=2$ より、$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 2)$ の 1 組

・$x=2$ のとき

③ より、$t^2-2t=0$

$\therefore\quad t(t-2)=0$

$\therefore\quad t=0$、2

よって、$(y,\ z)=(0,\ 2)$、$(2,\ 0)$ より、$(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 2)$、$(2,\ 2,\ 0)$ の 2 組

以上より、$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 2)$、$(2,\ 0,\ 2)$、$(2,\ 2,\ 0)$ の 3 組

(ⅱ) $x^2yz=\dfrac{256}{81}$ のとき、つまり、$x=\dfrac{8}{3}$ のとき

③ より、$t^2-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{4}{9}=0$

$\therefore\quad \left(t-\dfrac{4}{3}\right)^2=0$

$\therefore\quad t=\dfrac{4}{3}$

よって、$y=z=\dfrac{4}{3}$ より、$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ の 1 組

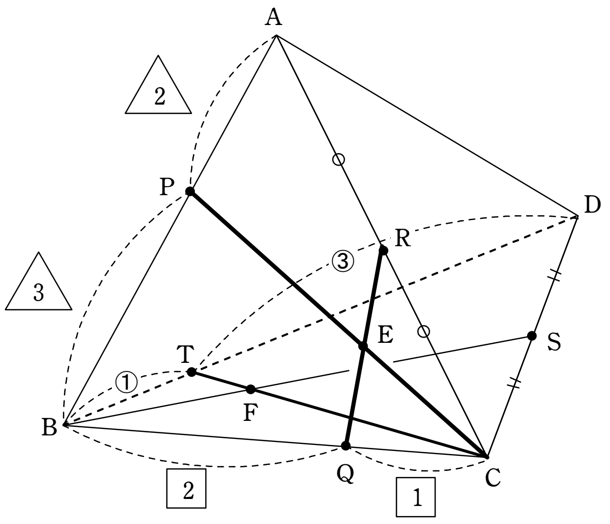
4　四面体 ABCD において、辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P、辺 BC を 2 : 1 に内分する点を Q、辺 CA の中点を R、辺 CD の中点をS、辺 BD を 1 : 3 に内分する点を T とし、直線 PC と直線 QR の交点を E、直線 BS と直線 CT の交点を F、3 点 E、C、D を通る平面を α とするとき、

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{け}}{\boxed{こ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{さ}}{\boxed{しす}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\boxed{せ}}{\boxed{そ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{た}}{\boxed{ち}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\dfrac{\boxed{つ}}{\boxed{て}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。

(3)　平面 α と直線 AF の交点を U とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AU}}=\dfrac{10}{19}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ であるから、四面体 ABCD の体積を V すると、四面体 UBCF の体積は $\dfrac{\boxed{と}}{\boxed{なに}}V$ である

解説



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

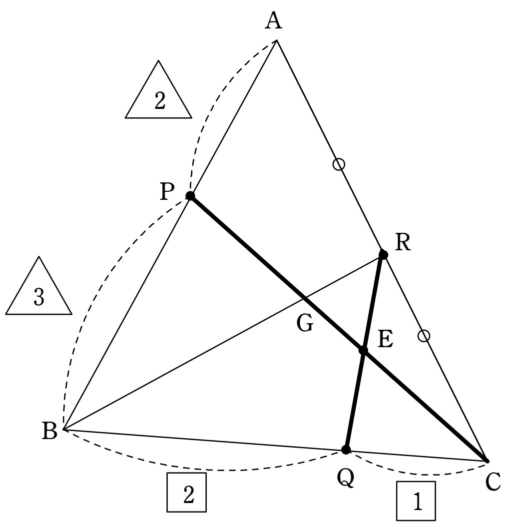
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{4}$

(1)　BR と CP の交点を G とする。



メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CR}}\cdot\frac{\mathrm{RG}}{\mathrm{GB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PA}}=1$$

$\therefore$　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{RG}}{\mathrm{GB}}\cdot\dfrac{3}{2}=1$

$\therefore$　RG : GB＝1 : 3

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{QE}}{\mathrm{ER}}\cdot\frac{\mathrm{RG}}{\mathrm{GB}}=1$$

$\therefore$　$\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{QE}}{\mathrm{ER}}\cdot\dfrac{1}{3}=1$

$\therefore$　QE : ER＝1 : 1

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

別解　PE : EC＝$1-t$: t とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\frac{2}{5}t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

QE : ER＝$1-s$: s とおくと

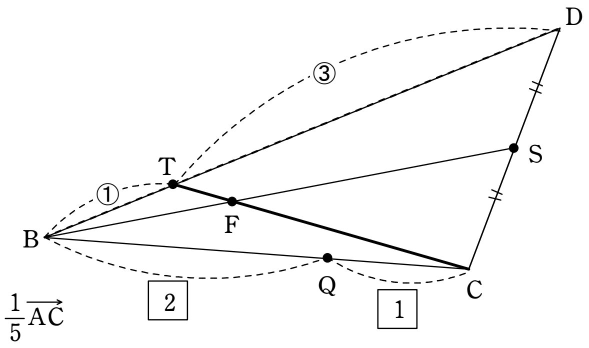
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AR}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=(1-t)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\frac{1}{3}s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}s\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立より、①、② を係数比較して

$$\begin{cases}\dfrac{2}{5}t=\dfrac{1}{3}s\\[2mm] 1-t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}s\end{cases}\qquad\therefore\quad s=\frac{5}{12}、t=\frac{1}{2}$$

よって、① より、$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　メネラウスの定理より



$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BT}}\cdot\frac{\mathrm{TF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}=1$$

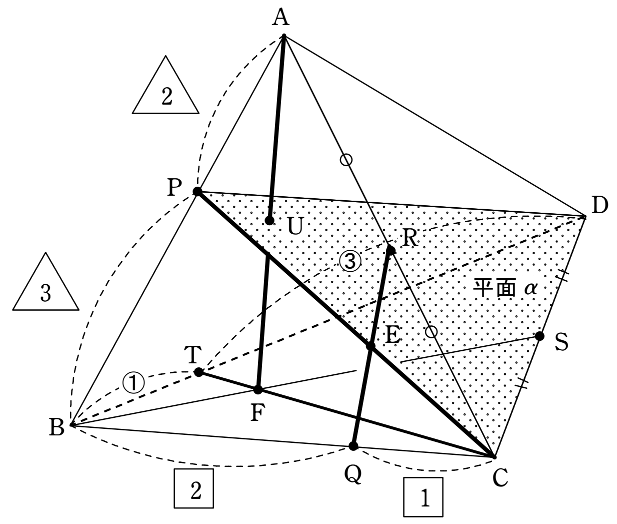
$\therefore$　$\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{TF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

$\therefore$　TF : FC＝1 : 4

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}&=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AT}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

(3)



$\overrightarrow{\mathrm{AU}}=\dfrac{10}{19}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ より、AF : UF＝19 : 10

また、△BCD の面積を S とすると

$$\triangle\mathrm{BCT}=\frac{1}{4}S$$

(2) より、TF : FC＝1 : 4

よって、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCF}&=\frac{4}{5}\triangle\mathrm{BCT}\\&=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}S\\&=\frac{1}{5}S\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\frac{\text{四面体 UBCF の体積}}{\text{四面体ABCD の体積}}&=\frac{\mathrm{UF}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{BCF}}{\triangle\mathrm{BCD}}\\&=\frac{9}{19}\cdot\frac{\frac{1}{5}S}{S}\\&=\frac{9}{95}\end{aligned}$$

$\therefore$　四面体 UBCF の体積＝$\dfrac{9}{95}V$

5　座標平面上に２つの円 $C_1: x^2+y^2=1$ と $C_2: (x-5)^2+y^2=16$ があり、この２つの円は点 $S(1,0)$ で接している。円 C_1 上を動く点Ｐと円 C_2 上を動く点Ｑがあり、動点Ｐと動点Ｑは点Ｓを同時に出発し、動点Ｐは反時計回りに円 C_1 を１周して点Ｓに、動点Ｑは時計回りに円 C_2 を半周して点 $(9,0)$ に同時に着くとし、動点Ｐと動点Ｑはそれぞれ一定の速さで回るものとする。円 C_2 の中心をＡとし、$\angle\mathrm{QAS}=\theta$ とするとき、

(1)　動点Ｐと動点Ｑの座標を θ を用いて表すと

$$\mathrm{P}\left(\cos\boxed{\text{ぬ}}\theta,\ \sin\boxed{\text{ぬ}}\theta\right),\ \mathrm{Q}\left(\boxed{\text{ねの}}\cos\theta+\boxed{\text{は}},\ \boxed{\text{ひ}}\sin\theta\right)$$

である。

ただし、θ の値の範囲は $\boxed{\text{ふ}}$ である。$\boxed{\text{ふ}}$ に当てはまるものを下の⓪～③の中から１つ選べ。

⓪　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$　　①　$0\leqq\theta\leqq\pi$　　②　$0\leqq\theta\leqq2\pi$　　③　$-\pi\leqq\theta\leqq\pi$

(2)　動点Ｐと動点Ｑの中点をＭとし、θ を $\boxed{\text{ふ}}$ の範囲で動かしたときの点Ｍが描く曲線を W とする。

点 $\left(\boxed{\text{へ}},\ 0\right)$ と点 $\left(\boxed{\text{ほ}},\ 0\right)$　$\left(\text{ただし、}\boxed{\text{へ}}<\boxed{\text{ほ}}\right)$

であるから、曲線 W と x 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ま}}}{\boxed{\text{み}}}\pi$ である。

解説

(1)　$\angle\mathrm{QAS}=\theta$ で、Ｑは円 C_2 を半周、Ｐは円 C_1 を１周し同時に目的地に到着するので、Ｐは x 軸の正方向とのなす角は 2θ となる。$(0\leqq\theta\leqq\pi)\Rightarrow$（①）

よって、$\mathrm{P}(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$

また、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$$=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}\cos(\pi-\theta)\\\sin(\pi-\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5-4\cos\theta\\4\sin\theta\end{pmatrix}$$

よって、$\mathrm{Q}(-4\cos\theta+5,\ 4\sin\theta)$

(2)　$\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}\cos2\theta\\\sin2\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5-4\cos\theta\\4\sin\theta\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos2\theta-4\cos\theta+5\\\sin2\theta+4\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(\cos2\theta-4\cos\theta+5)\\[2mm]y=\dfrac{1}{2}(\sin2\theta+4\sin\theta)\end{cases}$$

曲線 W と x 軸との交点より、$y=0$

よって、$\sin2\theta+4\sin\theta=0$

$\therefore$　$2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta=0$

$\therefore$　$2\sin\theta(\cos\theta+2)=0$

$\therefore$　$\sin\theta=0$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より、$\theta=0,\ \pi$

よって、交点の座標は、$(1,0)$、$(5,0)$ となる。

また、$0\leqq\theta\leqq\pi$ で $y\geqq0$ となり

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin2\theta+2\sin\theta$$

$$=-2\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta$$

$$=2\sin\theta(1-\cos\theta)\geqq0$$

となるので、x は単調増加である。

よって、求める面積を S とすると

$$S=\int_1^5 y\,dx$$

$x=\dfrac{1}{2}(\cos2\theta-4\cos\theta+5)$ とおくと、$dx=(-\sin2\theta+2\sin\theta)d\theta$

$x:1\to5$ のとき、$\theta:0\to\pi$ となるので

$$S=\int_0^\pi\frac{1}{2}(\sin2\theta+4\sin\theta)\cdot(-\sin2\theta+2\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left(-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta-\sin\theta\sin2\theta+4\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos4\theta}{2}-\sin\theta\cdot2\sin\theta\cos\theta+4\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{\cos4\theta}{4}-2\sin^2\theta\cos\theta-2\cos2\theta+\frac{7}{4}\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{16}\sin4\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta-\sin2\theta+\frac{7}{4}\theta\right]_0^\pi$$

$$=\frac{7}{4}\pi$$

参考　曲線 W は以下のような太線部分のグラフになる。