◇２０２４年度近畿大学医学部後期

1 四面体 ABCD に対して、条件

$$3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PD}=\vec{0}$$

を満たす点 P がある。直線 AP と平面 BCD との交点を Q、直線 BQ と辺 CD との交点を R とする。また、平面 PCD と辺 AB との交点を S とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) CR : RD を求めよ。

(2) BQ : QR を求めよ。

(3) AS : SB を求めよ。

(4) △PCD : △PDS : △PSC を求めよ。

解説

$3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PD}=\vec{0}$ より

$$-3\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$\therefore\ 8\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}}{8}$$

ここで、$\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=\overrightarrow{AT}$（CD の中点をT）とすると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AT}}{8}$$

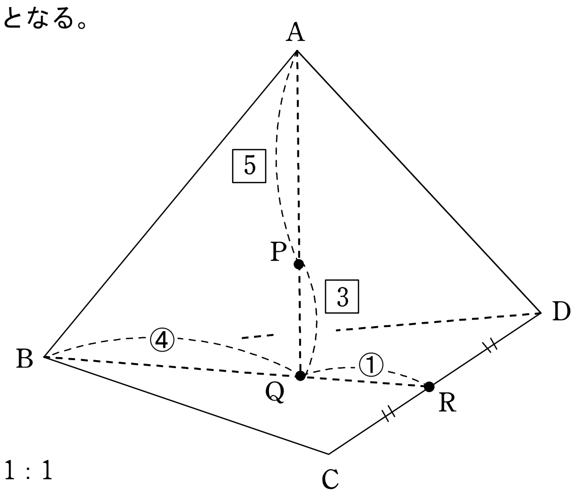
$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AT}}{4+1}$$

これより、P は B とCD の中点 T を 4 : 1 に内分する点を U としたとき AU を 5 : 3 に内分する点となる。

よって、AP と平面BCD の交点はただ 1 つしかないので、U と Q は一致する。

また、BQ とCD の交点もただ 1 つしかないので、T と R は一致する。

以上より、CD の中点が R、 B と R を 4 : 1 に内分する点が Q、 AQ を 5 : 3 に内分する点が P となる。



(1) CR : RD＝1 : 1

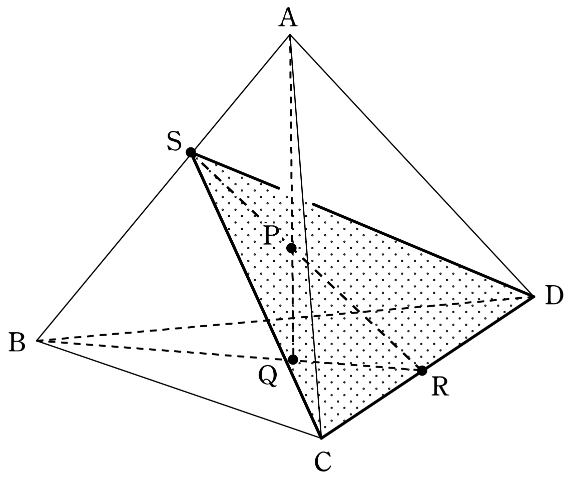
(2) BQ : QR＝4 : 1

(3) メネラウスの定理より

$$\frac{BR}{RQ}\cdot\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AS}{SB}=1$$

$$\therefore\ \frac{5}{1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{AS}{SB}=1$$

$$\therefore\ AS : SB=1 : 3$$



別解 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}}{8}$

$$=\frac{\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AR}}{8}$$

$$=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)+4\overrightarrow{AR}}{8}$$

これより、R と $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ を満たす点との中点が P となるが、直線 PR とAB の交点が S より、$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ となる。

以上より、AS : SB＝1 : 3

(4) メネラウスの定理より

$$\frac{BA}{AS}\cdot\frac{SP}{PR}\cdot\frac{RQ}{QA}=1$$

$$\therefore\ \frac{4}{1}\cdot\frac{SP}{PR}\cdot\frac{1}{4}=1$$

$$\therefore\ SP : PR=1 : 1$$

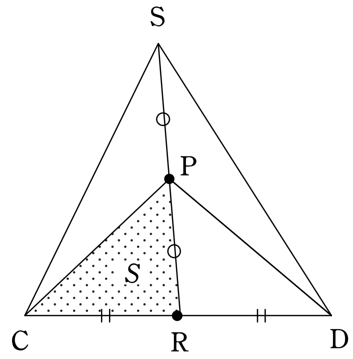
△PCR の面積を S とすると

$$\triangle PDR=\triangle SPC=\triangle SPD=S$$

となるので、

$$\triangle PCD : \triangle PDS : \triangle PSC=2S : S : S$$

$$=2 : 1 : 1$$



別解 $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PD}=\vec{0}$ より

$$3(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SP})+(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SP})+2(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SP})+2(\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SP})=\vec{0}$$

$$\therefore\ 8\overrightarrow{SP}=3\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}$$

$$\therefore\ 8\overrightarrow{SP}=4\cdot\frac{3\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}}{1+3}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}$$

ここで、S は AB を1 : 3 に内分する点より、$\dfrac{3\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}}{1+3}=\overrightarrow{SS}=\vec{0}$

よって、$8\overrightarrow{SP}=2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}$

$$\therefore\ \overrightarrow{SP}=\frac{\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{SR}$$

これより、P は SR の中点となる。（以下略）

2 袋 A には赤球が 2 個、袋 B には白球が 2 個入っている。このとき次の試行 T を行う。

（試行 T）袋 A、B から球を 1 個ずつ取り出し、袋 A から取り出した球を袋 B に、袋 B から取り出した球を袋 A に入れる。

n 回の試行 T を繰り返した後、袋 A に赤球が 1 個入っている確率を P_n、袋 A に赤球が 2 個入っている確率を Q_n、袋 A に赤球が入っていない確率を R_n とする。

すると、$P_3=\boxed{ア}$、$P_5=\boxed{イ}$ であり、P_{n+1} を P_n、Q_n、R_n を用いて表すと

$P_{n+1}=\boxed{ウ}$ となる。よって、P_n は n を用いて $P_n=\boxed{エ}$ と書ける。また、6 回の試行 T を行った後、袋 A に赤球が 1 個であった。このとき 3 回の試行 T 終了後も赤球が 1 個であった確率は $\boxed{オ}$ となる。

解説

以下のように状態 1 ～ 3 を設定する。

	状態 1	状態 2	状態 3
袋 A	赤球 2 個	赤球 1 個、白球 1 個	白球 2 個
袋 B	白球 2 個	赤球 1 個、白球 1個	赤球 2 個

（i） 状態 1 から試行 T で必ず状態 2 になる。

（ii） 状態 2 から試行 T を行い

①：袋 A から赤球、袋 B から赤球を取り出すとき、状態 2 のままである。

②：袋 A から白球、袋 B から白球を取り出すとき、状態 2 のままである。

③：袋 A から白球、袋 B から赤球を取り出すとき、状態 1 になる。

④：袋 A から赤球、袋 B から白球を取り出すとき、状態 3 になる。

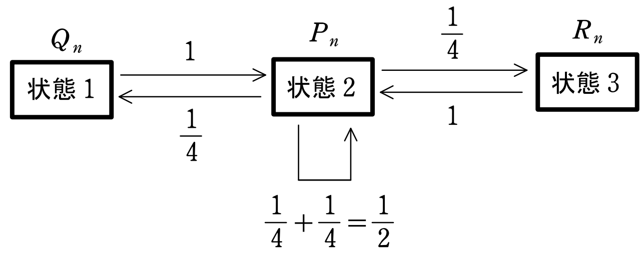
（iii） 状態 3 から試行 T で必ず状態 2 になる。

（i）のとき、確率は 1

（ii）- ① ～ ④のとき、確率はそれぞれ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

（iii）のとき、確率は 1

よって、状態遷移図は以下のようになる。



これより、n 回目から $n+1$ 回目を考えると

$$\begin{cases} P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+Q_n+R_n \\ Q_{n+1}=\frac{1}{4}P_n \\ R_{n+1}=\frac{1}{4}P_n \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。また、$P_n+Q_n+R_n=1$ ……… ② は常に成立する。

（ア）、（イ） $P_1=1$、$Q_1=0$、$R_1=0$ より、

① から、$P_2=\frac{1}{2}\cdot1+0+0=\frac{1}{2}$、$Q_2=R_2=\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{4}$

$$P_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}、Q_3=R_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}、Q_4=R_4=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$

$$P_5=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}、Q_5=R_5=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{32}$$

参考 ① を利用して求めたが、地道に計算してもよい。

（ウ）、（エ） ② より、$Q_n+R_n=1-P_n$

① の $P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+Q_n+R_n$ に代入して

$$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+1-P_n$$

$$\therefore\ P_{n+1}=-\frac{1}{2}P_n+1$$

$$\therefore\ P_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\ P_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\ P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

（オ） 状態 1 から始めて試行 T を k 回行った後に状態 1 になっている事象を X_k、事象 X_k が起こる確率を $P(X_k)$ とすると、求める確率は

$$P_{X_6}(X_3)=\frac{P(X_3\cap X_6)}{P(X_6)}$$

である。

3 回目に状態 1 になる確率は P_3 で 、そこから 3 回試行 T を行い再び状態 1 になる確率は P_4 である。

これは状態 1 から状態 2 になる確率が 1 より、状態 2 から 3 回試行 T を行い状態 2 になる確率と、状態 1 から 4 回試行 T を行い状態 2 になる確率が同じだからである。

$$\begin{aligned} P(X_6)&=P_6 \\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{16}+\frac{5}{32}+\frac{5}{32} \\ &=\frac{21}{32} \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P_{X_6}(X_3)&=\frac{P_3\times P_4}{P_6} \\ &=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}}{\frac{21}{32}} \\ &=\frac{5}{7} \end{aligned}$$

3 正の実数 a、b、c は $a+b+c=4$、$a^2+b^2+c^2=8$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $a=1$ のとき、b、c の値を求めよ。

(2) $ab+bc+ca$ の値を求めよ。

(3) abc の最大値を求めよ。

(4) $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$ の最小値を求めよ。

解説

(1) $a=1$ より、$\begin{cases} b+c=3 \cdots\cdots ① \\ b^2+c^2=7 \cdots\cdots ② \end{cases}$

② より、$(b+c)^2-2bc=7$

① を代入して

$3^2-2bc=7$

$\therefore\ bc=1 \cdots\cdots ③$

①、③ より、b、c は２次方程式 $t^2-3t+1=0$ の正の実数解より

$t=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

よって、$(b、c)=\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}、\dfrac{3\mp\sqrt{5}}{2}\right)$ （複号同順）

(2) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ 2(ab+bc+ca)=4^2-8$

$\therefore\ ab+bc+ca=4$

(3) $abc=k$ とおくと、$\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=4 \\ abc=k \end{cases}$ より、

a、b、c は３次方程式 $t^3-4t^2+4t-k=0$ の正の３個の実数解である。（ただし、２重解は２解として扱う）

つまり、$t^3-4t^2+4t=k$ より、

a、b、c は、２つのグラフ $\begin{cases} y=k \\ y=t^3-4t^2+4t \end{cases}$ が $t>0$ で３個の交点（接する場合も含む）をもつときの交点の x 座標である。

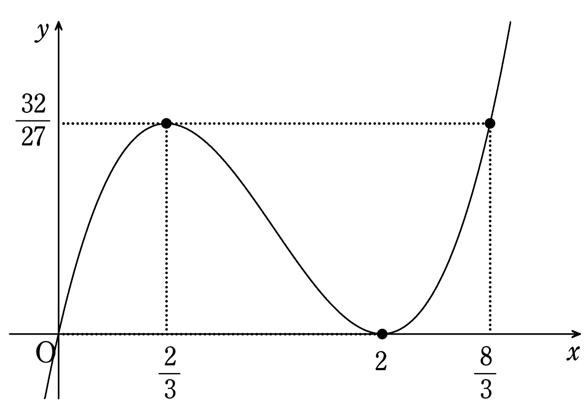
よって、$y'=3t^2-8t+4$

$=(3t-2)(t-2)$ より

増減表は以下のようになる。

x	0		$\frac{2}{3}$		2	
y'		+	0	−	0	+
y	0	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗

よって、グラフは以下のようになる。



よって、k のとり得る範囲は、$0<k\leqq\dfrac{32}{27}$ となるので

$(a、b、c)=\left(\dfrac{2}{3}、\dfrac{2}{3}、\dfrac{8}{3}\right)、\left(\dfrac{2}{3}、\dfrac{8}{3}、\dfrac{2}{3}\right)、\left(\dfrac{8}{3}、\dfrac{2}{3}、\dfrac{2}{3}\right)$ のとき、最大値 $\dfrac{32}{27}$

(4) $a+b+c=4$ より

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{4-a}{a}+\frac{4-b}{b}+\frac{4-c}{c}$$
$$=\frac{bc(4-a)+ca(4-b)+ab(4-c)}{abc}$$
$$=\frac{-3abc+4(ab+bc+ca)}{abc}$$
$$=-3+\frac{16}{abc}$$
$$=-3+\frac{16}{k}$$

(3) より、$0<k\leqq\dfrac{32}{27}$ なので、$k=\dfrac{32}{27}$ で最小値 $-3+\dfrac{16}{\frac{32}{27}}=\dfrac{21}{2}$

別解 $$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b^2c+bc^2+ac^2+a^2c+a^2b+ab^2}{abc}$$
$$=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{abc}$$
$$=\frac{4\cdot4-3abc}{abc}$$
$$=-3+\frac{16}{k}$$

以下略