◇２０２４年度近畿大学医学部前期（全学部共通問題）

1 座標平面において、原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く点 P と、点 A $(4\sqrt{3}, 4)$ を中心とする半径 5 の円周上を動く点 Q がある。

(1) OA＝$\boxed{\text{ア}}$ である。また、直線 OA と x 軸のなす角 α は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である。

ただし、$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) P、Q の y 座標をそれぞれ p、q とする、$q-p$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{エオ}} \leqq q-p \leqq \boxed{\text{カキ}}$$

である。

(3) 線分 PQ の長さのとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ク}} \leqq \text{PQ} \leqq \boxed{\text{ケコ}}$$

である。

(4) 線分 PQ が通りうる領域を D とする。D の面積は

$$\boxed{\text{サシ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}+\boxed{\text{セソ}}\pi$$

である。

(5) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\text{OA}}$ と $\overrightarrow{\text{PQ}}$ のなす角を β とする。ただし、$0 \leqq \beta \leqq \pi$ とする。
$\tan\beta$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{タ}} \leqq \tan\beta \leqq \frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

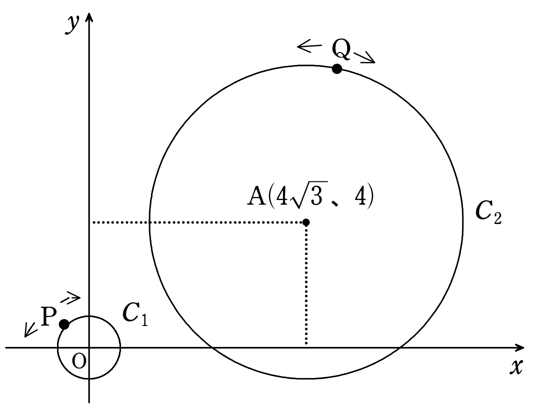
である。

(6) 直線 PQ の傾きを m とする。m の最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

解説



点 O を中心とする円を C_1、点 A を中心とする円を C_2 とする。

(1) $\text{OA}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$

直線 OA：$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ より、$\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって、直線 OA と x 軸のなす角 α は $\dfrac{1}{6}\pi$

(2) 図より、p、q のとりうる値の範囲は

$$\begin{cases}-1 \leqq p \leqq 1 \cdots\cdots ① \\ -1 \leqq q \leqq 9 \cdots\cdots ②\end{cases}$$

① より、$-1 \leqq -p \leqq 1$

p、q は独立より、これに ② を加えて、$q-p$ のとりうる値の範囲は

$$-2 \leqq q-p \leqq 10$$

(3) PQ が最小となるのは、図Ⅰのように直線 OA 上に P、Q が存在しかつ、2 点が最も近いときである。このとき

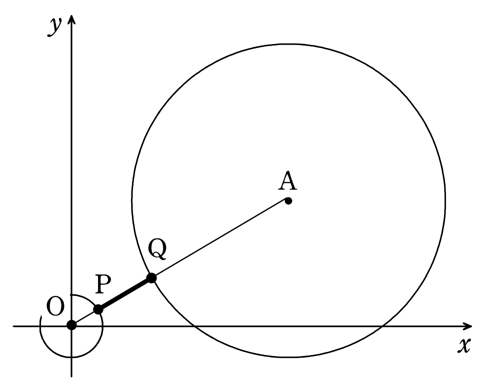
$$\begin{aligned}\text{PQ}&=\text{OA}-(C_1\text{の半径}+C_2\text{の半径})\\&=8-(1+5)\\&=2\end{aligned}$$

PQ が最大となるのは、図Ⅱのように直線 OA 上に P、Q が存在しかつ、2 点が最も遠いときである。このとき

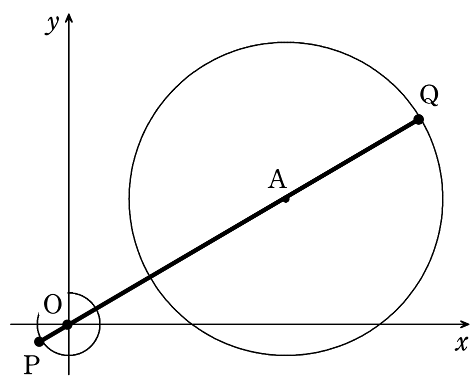
$$\begin{aligned}\text{PQ}&=\text{OA}+(C_1\text{の半径}+C_2\text{の半径})\\&=8+(1+5)\\&=14\end{aligned}$$

以上より、線分 PQ の長さのとりうる値の範囲は

$$2 \leqq \text{PQ} \leqq 14$$

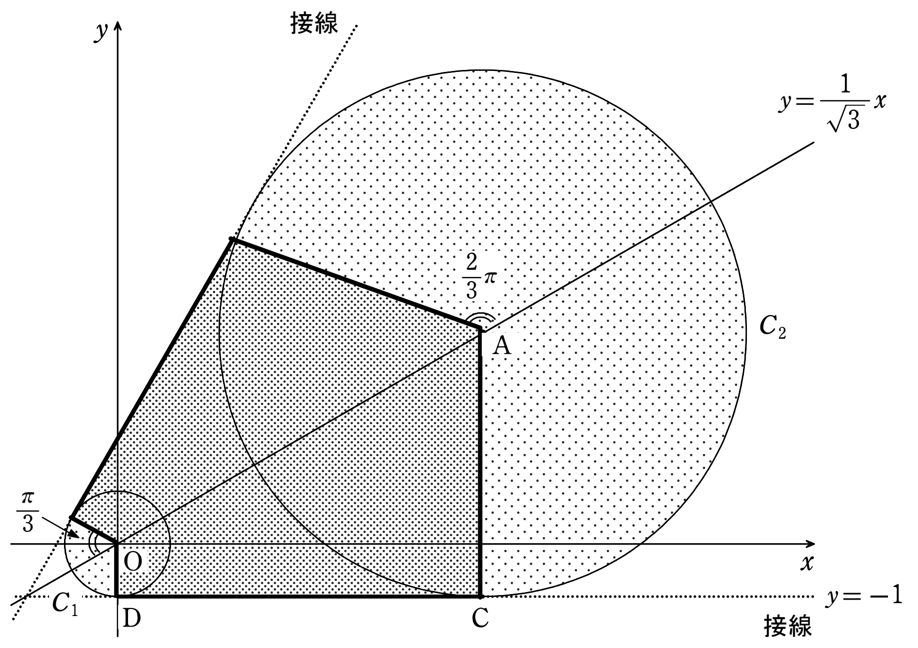


図Ⅰ



図Ⅱ

(4) 領域 D は下の図の打点部分となる。

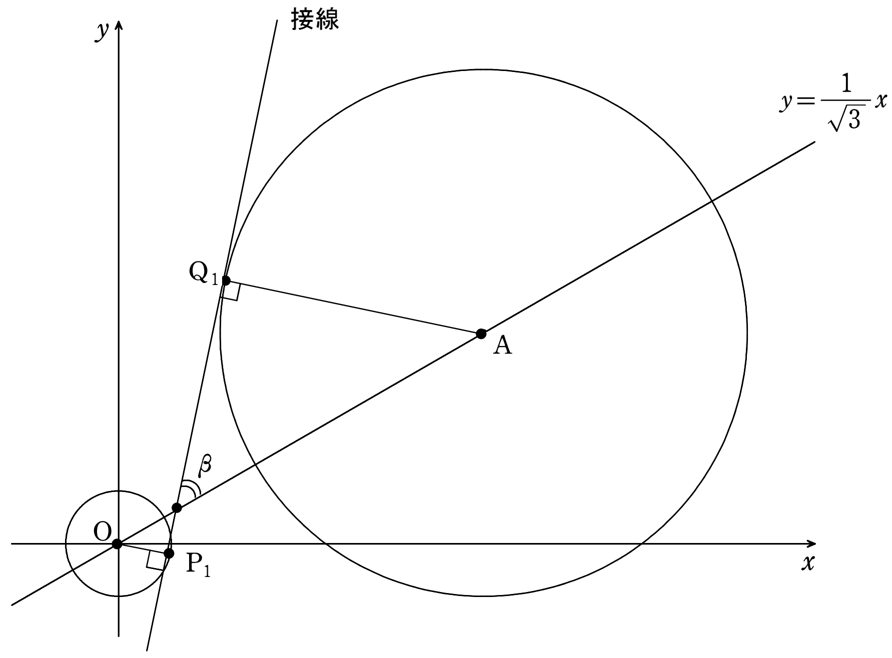


領域 D は、$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関して対称より、上図のように設定をする。

よって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=2\left\{\left(C_1\text{における中心角が}\frac{\pi}{3}\text{である扇形}\right)+(\text{台形 OACD})\right.\\&\qquad\left.+\left(C_2\text{における中心角が}\frac{2}{3}\pi\text{である扇形}\right)\right\}\\&=2\left\{\pi\cdot1^2\times\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}+\frac{1}{2}\cdot(1+5)\cdot4\sqrt{3}+\pi\cdot5^2\times\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}\right\}\\&=24\sqrt{3}+17\pi\end{aligned}$$

(5)



図より、$0 \leqq \beta < \dfrac{\pi}{2}$ は自明である。

このとき、$\tan\beta$ は単調増加より、β が最大・最小となるときを考える。

・β が最小となるのは、直線 OA と直線 PQ が一致するときで、このとき $\beta=0$ より、$\tan\beta=0$

・β が最大となるのは、図のように PQ が C_1 と C_2 の共通接線となるときである。このとき、図のように接点を P_1、Q_1、直線 OA と共通接線 P_1Q_1 との交点を R とすると、$\triangle ORP_1 \backsim \triangle ARQ_1$ で相似比は $1:5$ より

$$\begin{aligned}\text{AR}&=\frac{5}{6}\text{OA}\\&=\frac{5}{6}\times8\end{aligned}$$

$=\dfrac{20}{3}$

$\triangle \mathrm{ARQ_1}$ において、$\sin\beta=\dfrac{\mathrm{AQ_1}}{\mathrm{AR}}$

$=\dfrac{5}{\frac{20}{3}}$

$=\dfrac{3}{4}$

よって、$\tan\beta=\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

以上より、$\tan\beta$ のとりうる値の範囲は、$0\leqq\tan\beta\leqq\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

(6)　(5) の図における共通接線 $\mathrm{P_1Q_1}$ が m が最大となるときより

$$
\begin{aligned}
m&=\tan(\alpha+\beta)\\
&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\
&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3\sqrt{7}}{7}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{7}}\\
&=\frac{7\sqrt{3}+9\sqrt{7}}{21-3\sqrt{21}}\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{(7\sqrt{3}+9\sqrt{7})(7+\sqrt{21})}{(7-\sqrt{21})(7+\sqrt{21})}\\
&=\frac{112\sqrt{3}+84\sqrt{7}}{3\cdot 28}\\
&=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

別解　共通接線の傾きを直接求める。

y 軸平行な接線は存在しないので、$y=mx+n$ とすると

C_1 と接するので、$\dfrac{|n|}{\sqrt{1+m^2}}=1$

$\therefore\ |n|=\sqrt{1+m^2}$ ……… ③

C_2 と接するので、$\dfrac{|4\sqrt{3}m-4+n|}{\sqrt{1+m^2}}=5$

$\therefore\ |4\sqrt{3}m-4+n|=5\sqrt{1+m^2}$ ……… ④

③、④ より

$|4\sqrt{3}m-4+n|=5|n|$

$\therefore\ 4\sqrt{3}m-4+n=\pm5n$

$\therefore\ \sqrt{3}m-1-n=0$ または、$2\sqrt{3}m-2+3n=0$

$\therefore\ n=\sqrt{3}m-1$ ……… ⑤ または、$n=\dfrac{2}{3}(1-\sqrt{3}m)$ ……… ⑥

③ より、$n^2=1+m^2$ ……… ⑦

⑤、⑦ より

$1+m^2=3m^2-2\sqrt{3}m+1$

$\therefore\ 2m^2-2\sqrt{3}m=0$

$\therefore\ m=0$、$m=\sqrt{3}$

⑥、⑦ より

$1+m^2=\dfrac{4}{9}(1+3m^2-2\sqrt{3}m)$

$\therefore\ 9+9m^2=4+12m^2-8\sqrt{3}m$

$\therefore\ 3m^2-8\sqrt{3}m-5=0$

$\therefore\ m=\dfrac{8\sqrt{3}\pm6\sqrt{7}}{6}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pm\sqrt{7}$

以上より、共通接線の傾き m が最大となるのは、$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\sqrt{7}$

別解　共通接線の傾きを直接求める。

$C_1: x^2+y^2=1$ 上の点 $(s、t)$ における接線は、$sx+ty=1$ …… ⑧

これが C_2 と接するので、

$$\frac{|4\sqrt{3}s+4t-1|}{\sqrt{s^2+t^2}}=5 \quad\cdots\cdots ⑨$$

$(s、t)$ は $x^2+y^2=1$ 上の点より、$s^2+t^2=1$ …… ⑩

⑩を ⑨ に代入して、$|4\sqrt{3}s+4t-1|=5$

よって、$4\sqrt{3}s+4t-1=\pm5$

$\therefore\ 2\sqrt{3}s+2t-3=0$ または、$\sqrt{3}s+t+1=0$

$\therefore\ t=-\sqrt{3}s+\dfrac{3}{2}$ …… ⑪または、$t=-\sqrt{3}s-1$…… ⑫

⑩、⑪ より

$s^2+\left(-\sqrt{3}s+\dfrac{3}{2}\right)^2=1$

$\therefore\ 4s^2-3\sqrt{3}s+\dfrac{5}{4}=0$

$\therefore\ s=\dfrac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{8}$

⑪ より、$t=-\dfrac{9\pm\sqrt{21}}{8}+\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ t=\dfrac{3\mp\sqrt{21}}{8}$　(複号同順)

⑧ より、傾きは $-\dfrac{s}{t}\ (t\fallingdotseq 0)$ より、共通接線の傾きは

$(s、t)=\left(\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{8}、\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}\right)$ のとき

$$-\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3-\sqrt{21}}=-\frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{7})(3+\sqrt{21})}{(3-\sqrt{21})(3+\sqrt{21})}=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\sqrt{7}$$

$(s、t)=\left(\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}、\dfrac{3+\sqrt{21}}{8}\right)$ のとき

$$-\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{3+\sqrt{21}}=-\frac{(3\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{21}-3)}{(\sqrt{21}+3)(\sqrt{21}-3)}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{7}$$

⑩、⑫ より

$s^2+(-\sqrt{3}s-1)^2=1$

$\therefore\ 4s^2+2\sqrt{3}s=0$

$\therefore\ s=0$、$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑫ より、$t=-1$、$\dfrac{1}{2}$

⑧ より、傾きは $-\dfrac{s}{t}\ (t\fallingdotseq 0)$ より、共通接線の傾きは

$(s、t)=(0、-1)$ のとき、0

$(s、t)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}、\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$-\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

以上より、傾きが最大となるのは、$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\sqrt{7}$ より、$m=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\sqrt{7}$

◇２０２４年度近畿大学医学部前期（全学部共通問題）

2 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_n=[\sqrt{n}] \quad (n=1、2、3、\cdots\cdots)$$

ただし、実数 x に対して、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $a_{10}=$ $\boxed{ア}$、$a_{100}=$ $\boxed{イウ}$、$a_{2024}=$ $\boxed{エオ}$ である。

(2) 自然数 n に対して、$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。

(ⅰ) $S_{10}=$ $\boxed{カキ}$、$S_{100}=$ $\boxed{クケコ}$ である。

(ⅱ) S_{2024} の最大の素因数は $\boxed{サシス}$ である。

(ⅲ) $S_n>2024$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{セソタ}$ である。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を次の規則 1 、規則 2 で定める。

規則 1 ：$\dfrac{n}{a_n}=\left[\dfrac{n}{a_n}\right]$ となる自然数 n に対して、$b_n=\dfrac{n}{a_n}$ とおく。

規則 2 ：$\dfrac{n}{a_n}\neq\left[\dfrac{n}{a_n}\right]$ となる自然数 n に対して、$b_n=0$ とおく。

(ⅰ) $b_{10}=$ $\boxed{チ}$、$b_{100}=$ $\boxed{ツチ}$ である。

(ⅱ) $1\leqq n\leqq 100$ において、$b_n>0$ を満たす自然数 n の個数は $\boxed{トナ}$ である。

(ⅲ) $\sum_{k=1}^{100} b_k=$ $\boxed{ニヌネ}$ である。

解説

(1) $3<\sqrt{10}<4$ より、$a_{10}=[\sqrt{10}]=3$

$\sqrt{100}=10$ より、$a_{100}=[\sqrt{100}]=10$

$44=\sqrt{1936}<\sqrt{2024}<\sqrt{2025}=45$ より、$a_{2024}=[\sqrt{2024}]=44$

(2) $[x]$ は x を超えない最大の整数より

$$[x]\leqq x<[x]+1$$

が成り立つ。

よって、$[\sqrt{k}]=m$ (k、m は自然数)となる k の個数は

$$[\sqrt{k}]\leqq\sqrt{k}<[\sqrt{k}]+1$$

$\therefore\quad m\leqq\sqrt{k}<m+1$

$\therefore\quad m^2\leqq k<m^2+2m+1$

$\therefore\quad m^2\leqq k\leqq m^2+2m$ より

$(m^2+2m)-m^2+1=2m+1$ 個 となる。

これより、$a_n=N$ となる末項までの総和を $T(N)$ とすると

$$T(N)=\sum_{k=1}^{N} k(2k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{N}(2k^2+k)$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+\frac{1}{2}N(N+1)$$
$$=\frac{1}{6}N(N+1)(4N+5)$$

(ⅰ) S_{10} について

(1) より、$a_n=3$ となる n は、$1\leqq n\leqq 10$ において $n=9$、10 のときより

$$S_{10}=T(2)+2\times 3$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 13+6$$
$$=19$$

S_{100} について

(1) より、$a_n=10$ となる n は、$1\leqq n\leqq 100$ において、$n=100$ のときより

$$S_{100}=T(9)+10$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 41+10$$
$$=625$$

参考 実験をすると以下のようになる。

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	……	15	16	17	……
$[\sqrt{k}]$	1	1	1	2	2	2	2	2	3	……	3	4	4	……

3 個　5 個　7 個

よって、$[\sqrt{k}]=m$ となる m の個数は $2m+1$ 個と予想できる。

本問は、マーク式なので、表のようにしてから、群数列で処理してもよい。

(ⅱ) (1) より、$a_n=44$ となる最後の n は (1) より、$n=2024$ なので

$$S_{2024}=T(44)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 181$$
$$=2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 181$$

よって、S_{2024} の最大の素因数は 181

(ⅲ) $T(13)=1729$、$T(14)=2135$ より、$S_n>2024$ を満たす最小の n では、$a_n=14$ となるので、$a_n=13$ となる末項までの項数は

$$\sum_{k=1}^{13}(2k+1)=\frac{13}{2}(3+27)=195$$

である。

また、$2024-T(13)=2024-1729$
$$=295$$
$$=14\times 21+1$$

となるので、S_n は単調増加より、$n=195+21+1=217$ で初めて 2024 の値を超える。

$(S_{216}=T(13)+14\times 21=2023$、$S_{217}=T(13)+14\times 22=2037)$

以上より、$S_n>2024$ を満たす最小の n は217

(3)

(ⅰ) $\dfrac{10}{a_{10}}=\dfrac{10}{3}$ で、$\left[\dfrac{10}{3}\right]=3$ より、規則 2 から、$b_{10}=0$

$\dfrac{100}{a_{100}}=\dfrac{100}{10}=10$ で、$[10]=10$ より、規則 1 から、$b_{100}=10$

(ⅱ) (2)(ⅰ) より、$a_n=k$ を満たす n の範囲は $k^2\leqq n\leqq k^2+2k$

よって、$k\leqq\dfrac{n}{k}\leqq k+2$ より

$$k\leqq\frac{n}{a_n}\leqq k+2$$

これより、$b_n>0$ となる b_n の値は、この範囲では k、$k+1$、$k+2$ の 3 個で、これ以外の値はすべて $b_n=0$ である。

$1\leqq n\leqq 100$ において、a_n のとりうる値の範囲は $1\leqq a_n\leqq 10$ で、$a_n=10$ となる n は $n=100$ のみなので、$b_n>0$ となる n の個数は

$$3\times 9+1=28 \text{ 個}$$

(ⅲ) (ⅱ) より

$$\sum_{k=1}^{100} b_k=\sum_{\ell=1}^{9}\{\ell+(\ell+1)+(\ell+2)\}+10$$
$$=3\sum_{\ell=1}^{9}(\ell+1)+10$$
$$=3\times\frac{9}{2}(2+10)+10$$
$$=172$$

3

(1) $\log_{16}1024=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) 方程式 $\log_{16}x=-\dfrac{1}{4}$ の解は $x=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(3) 関数

$$f(x)=(\log_{16}x)^2-\log_{16}x^4-3$$

の最小値は $\boxed{オカ}$ である。また、$f(x)$ が最小となる x の値は $x=\boxed{キクケ}$ である。

(4) 不等式

$$1+2\log_{16}(9-x)<\frac{1}{2}+\frac{1}{\log_{10}4}+\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

を満たす実数 x のとりうる値の範囲は

$$\boxed{コサ}<x<\boxed{シス}、\boxed{セ}<x<\boxed{ソ}$$

である。

(5) $x>1$ とする。関数

$$g(x)=\log_{16}x+10\log_x1024+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x}$$

の最小値は $\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}$ である。また、$g(x)$ が最小となる x の値の整数部分を N とする。N の桁数は $\boxed{ツ}$ であり、N の最高位の数字は $\boxed{テ}$ である。

ただし、$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$、$\log_{10}7=0.8451$ とする。

解説

(1) $\log_{16}1024=\dfrac{\log_2 2^{10}}{\log_2 2^4}$

$$=\frac{10}{4}$$

$$=\frac{5}{2}$$

(2) $\log_{16}x=-\dfrac{1}{4}$ より

$$\log_{16}x=\log_{16}16^{-\frac{1}{4}}$$

$\therefore\ x=16^{-\frac{1}{4}}$

$\therefore\ x=(2^4)^{-\frac{1}{4}}$

$\therefore\ x=2^{-1}$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

(3) $f(x)=(\log_{16}x)^2-\log_{16}x^4-3$

$\quad=(\log_{16}x)^2-4\log_{16}x-3$

$\log_{16}x=t$ とおくと

$f(x)=t^2-4t-3$

$\quad=(t-2)^2-7$

よって、$t=2$ のとき、つまり、$\log_{16}x=2$ より、$x=16^2=256$ のとき

最小値 -7 となる。

(4) 真数条件より

$$\begin{cases}9-x>0\\ \dfrac{1}{2}x+1>0\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}x<9\\ x>-2\end{cases}$$

よって、$-2<x<9$ ………①

与式より

$$\frac{1}{2}+2\log_{16}(9-x)<\frac{1}{2\log_{10}2}+\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{2\log_2(9-x)}{\log_2 2^4}<\dfrac{1}{2}\log_2 10+\dfrac{\log_2\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)}{\log_2 2^{-2}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_2(9-x)<\dfrac{1}{2}\log_2 10-\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$

$\therefore\ 1+\log_2(9-x)+\log_2\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)<\log_2 10$

$\therefore\ \log_2 2(9-x)\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)<\log_2 10$

底 >1 より

$$2(9-x)\left(\frac{1}{2}x+1\right)<10$$

$\therefore\ (9-x)(x+2)<10$

$\therefore\ x^2-7x-8>0$

$\therefore\ (x-8)(x+1)>0$

$\therefore\ x<-1、8<x$

① より、$-2<x<-1、8<x$

(5) $g(x)=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^4}+10\cdot\dfrac{\log_2 2^{10}}{\log_2 x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}\log_2 x}{\log_2 2^{-2}}$

$\quad=\dfrac{1}{4}\log_2 x+\dfrac{100}{\log_2 x}-\dfrac{1}{8}\log_2 x$

$\quad=\dfrac{1}{8}\log_2 x+\dfrac{100}{\log_2 x}$

$x>1$ より、$\dfrac{1}{8}\log_2 x>0$、$\dfrac{100}{\log_2 x}>0$ から相加相乗平均の大小関係より

$$\frac{1}{8}\log_2 x+\frac{100}{\log_2 x}\geqq 2\sqrt{\frac{\log_2 x}{8}\cdot\frac{100}{\log_2 x}}$$

$$=2\sqrt{\frac{100}{8}}$$

$$=5\sqrt{2}$$

等号は、$\dfrac{1}{8}\log_2 x=\dfrac{100}{\log_2 x}$ のとき

つまり、$(\log_2 x)^2=800$

$\log_2 x>0$ より、$\log_2 x=20\sqrt{2}$

よって、$x=2^{20\sqrt{2}}$ のとき、等号成立。

以上より、$g(x)$ は$x=2^{20\sqrt{2}}$ のとき、最小値 $5\sqrt{2}$

また、$(1.41)^2<2<(1.42)^2$ より、$1.41<\sqrt{2}<1.42$

これより

$$\begin{aligned}\log_{10}2^{20\sqrt{2}}&=20\sqrt{2}\log_{10}2\\&>20\cdot1.41\cdot0.3010\\&=8.4882\\&=8+0.4882\\&>8+\log_{10}3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}2^{20\sqrt{2}}&=20\sqrt{2}\log_{10}2\\&<20\cdot1.42\cdot0.3010\\&=8.5484\\&=8+0.5484\\&<8+2\cdot0.301\\&=8+\log_{10}4\end{aligned}$$

以上より、$8+\log_{10}3<\log_{10}2^{20\sqrt{2}}<8+\log_{10}4$

$\therefore\ \log_{10}3\times10^8<\log_{10}2^{20\sqrt{2}}<\log_{10}4\times10^8$

$\therefore\ 3\times10^8<2^{20\sqrt{2}}<4\times10^8$

これより、$2^{20\sqrt{2}}$ は 9 桁で、最高位の数字は 3 となる。

参考 $\sqrt{2}\fallingdotseq1.41$とすると

$$\begin{aligned}\log_{10}2^{20\sqrt{2}}&=20\sqrt{2}\log_{10}2\\&=20\cdot1.41\cdot0.301\\&=8.4882\end{aligned}$$

よって、$2^{20\sqrt{2}}=10^{8.4882}$

$\quad=10^{0.4882}\times10^8$

$3=10^{0.4771}<10^{0.4882}<10^{0.602}=4$ より、$10^{0.4882}$ は桁数に影響しないので

$2^{20\sqrt{2}}$ は 9 桁で、最高位の数字は 3 となる。