1　O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(\sqrt{2}$、$\sqrt{2})$、B$(2-\sqrt{3}$、$1)$ がある。

(1)　線分 OA の長さは $\boxed{ア}$ であり、直線 OA と x 軸のなす角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると、$\alpha=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。また、直線 OB の方程式は $y=\left(\boxed{エ}+\sqrt{\boxed{オ}}\right)x$ であり、2 直線 OA、OB のなす角を $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると、$\beta=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi$ である。

(2)　点 A を中心として点 O を通る円を K とし、2 直線 OA、OB と円 K の交点で第 1 象限にあるものをそれぞれ C、D とする。線分 OC、OD および短い方の弧 CD で囲まれる領域を S とする。

（i）　領域 S の面積は $\sqrt{\boxed{ク}}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi$ であり、点 D の座標は

$$\left(\frac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}-\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}、\frac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\right)$$

である。

（ii）　円 K 上の点 C における接線の方程式は $y=\boxed{ソ}x+\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}$ である。また、点P$(x$、$y)$ が領域 S を動くとき、$x+2y$ の最大値は $\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}+\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}$ である。ただし、$\boxed{テ}<\boxed{ナ}$ とする。

（iii）　線分 AC、AD および短い方の弧 CD で囲まれた扇形 ACD を、直線 OD の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\pi^{\boxed{ネ}}$ である。

解説

(1)　$\mathrm{OA}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

直線 OA : $y=x$ より、傾き 1 から $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

直線 OB : $y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}x=(2+\sqrt{3})x$ より、$\tan(\alpha+\beta)=2+\sqrt{3}$

よって、$\tan\beta=\tan\{(\alpha+\beta)-\alpha\}$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}-1}{1+(2+\sqrt{3})\cdot 1}$$

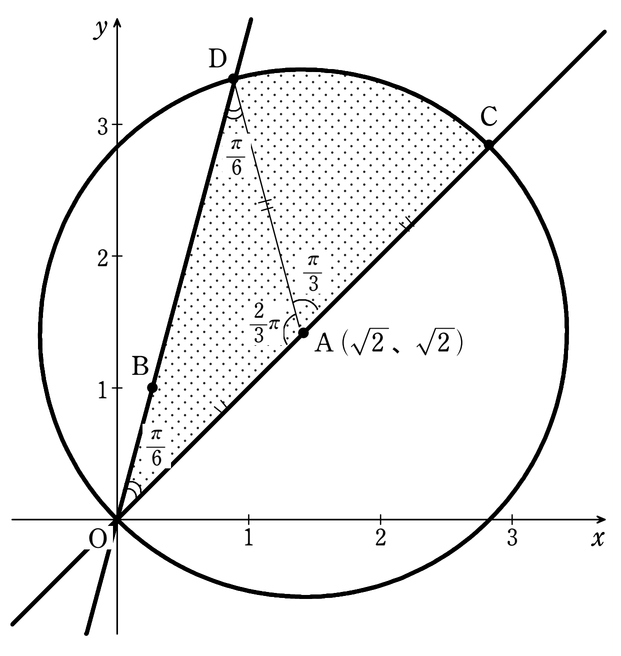
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

これより、$\beta=\dfrac{\pi}{6}$

参考　$\tan\dfrac{5}{12}\pi=2+\sqrt{3}$ より、$\beta=\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}$ としてもよい。

(2)　円 K は $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$ となり、下図のようになる。



（i）　図より、$S=$(△OAD の面積)＋(扇形ACD の面積)

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi+\pi\cdot 2^2\cdot\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}$$

$$=\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$$

また、$\mathrm{OB}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$$\mathrm{OD}=2\,\mathrm{OA}\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$$

より、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{3}\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\cdot\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}-\sqrt{6}\\3\sqrt{2}+\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

よって、D の座標は、$\left(\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}、\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$ となる。

別解　円 K と直線 OD の交点より

$$(x-\sqrt{2})^2+\{(2+\sqrt{3})x-\sqrt{2}\}^2=4$$

$\therefore\quad (8+4\sqrt{3})x-2\sqrt{2}(3+\sqrt{3})x=0$

$\therefore\quad x\{(4+2\sqrt{3})x-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\}=0$

$\therefore\quad x=0、x=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

よって、D の座標は、$\left(\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}、\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$ となる。

（ii）　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ より、C の座標は $(2\sqrt{2}$、$2\sqrt{2})$

よって、C における接線は

$$(2\sqrt{2}-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})=4$$

$\therefore\quad \sqrt{2}(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}(y-\sqrt{2})=4$

$\therefore\quad y=-x+4\sqrt{2}$

また、$x+2y=k$ とおくと、この直線を円 K と交点をもつように動かすときの切片が最大になるときを考える。

これは、円 K と第 1 象限で接するときより

$$\frac{|\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2$$

$\therefore\quad |k-3\sqrt{2}|=2\sqrt{5}$

$\therefore\quad k=3\sqrt{2}\pm 2\sqrt{5}$

$k>0$ より、$k=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

よって、最大値は $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

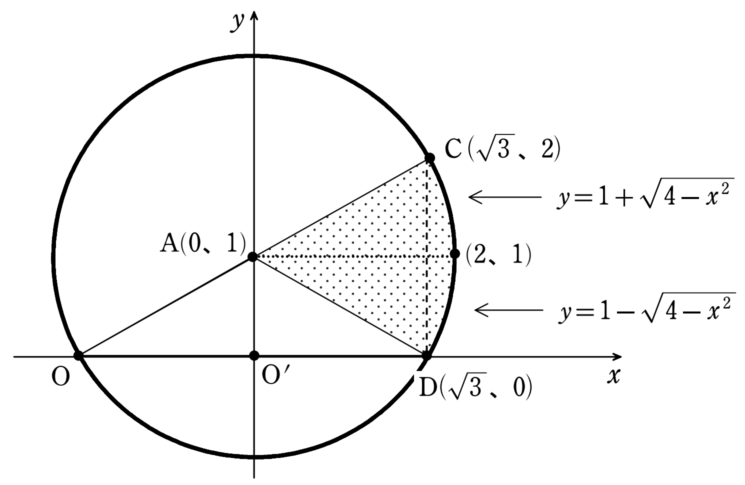
別解　C における接線について

C における接線は、C において直線 OA に垂直より

$$y=-(x-2\sqrt{2})+2\sqrt{2}$$

$\therefore\quad y=-x+4\sqrt{2}$

（iii）　直線 OD が x 軸、A が y 軸上にくるように移動すると、下図のようになる。



このとき、円 K の方程式は、$x^2+(y-1)^2=4$ となる。

図の打点部分を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積が求めるものである。

よって、円 K より

$$(y-1)^2=4-x^2$$

$\therefore\quad y=1=\pm\sqrt{4-x^2}$

$\therefore\quad y=1\pm\sqrt{4-x^2}$　より

求める体積を V とすると

$$V=\frac{\pi}{3}(2^2\cdot 2\sqrt{3}-1^2\cdot\sqrt{3}\times 2)+\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}(1-\sqrt{4-x^2})^2dx$$

$$=2\sqrt{3}\pi+4\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=2\sqrt{3}\pi+4\pi\left(\pi\cdot 2^2\times\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi^2$$

2 OA＝3、OB＝2、$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{6}$ の平行四辺形 OACB があり、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\boxed{\text{ア}}$ であり、$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$ である。また、平行四辺形 OACB の面積は $\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2) 点 O から対角線 AB に垂線を引き交点を D とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}\vec{b}$ である。また、直線 OD と辺 BC の交点を E とするとき、BE : EC を最も簡単な整数の比で表すと $\boxed{\text{シ}}$: $\boxed{\text{ス}}$ である。

(3) (2) のとき、3 点 O、A、D を通る円を K とし、その中心を F とする。円 K と直線 OC の交点で O でない方を G、円 K と直線 DF の交点で D でない方を H、円 K と直線 OB の交点で O でない方を I とする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\vec{b}$ であり、三角形 OAD の面積を S、五角形 OHAGI の面積を T とすると、$\dfrac{S}{T}=\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$ である。

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$

$=3\cdot2\cdot\dfrac{1}{6}$

$=1$

△OAB で余弦定理より

$\mathrm{AB}^2=4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{1}{6}$

$=11$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{11}$

平行四辺形 OACB の面積＝2×△OAB の面積

$=2\times\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\sqrt{9\times4-1}$

$=\sqrt{35}$

(2) AD＝x、OD＝y とおくと
△OAD、△OBD で三平方の定理より

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \cdots\cdots ① \\ (\sqrt{11}-x)^2+y^2=4 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② より、$11-2\sqrt{11}\,x+x^2+y^2=4$

① を代入して

$11-2\sqrt{11}\,x+9=4$

$\therefore\ x=\dfrac{8\sqrt{11}}{11}$

よって、$\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=\dfrac{8\sqrt{11}}{11}:\sqrt{11}-\dfrac{8\sqrt{11}}{11}$

$=8:3$

これより、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{11}\vec{a}+\dfrac{8}{11}\vec{b}$

別解　AD : BD＝$t:1-t$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ となる。

OD⊥AB より、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって、$\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

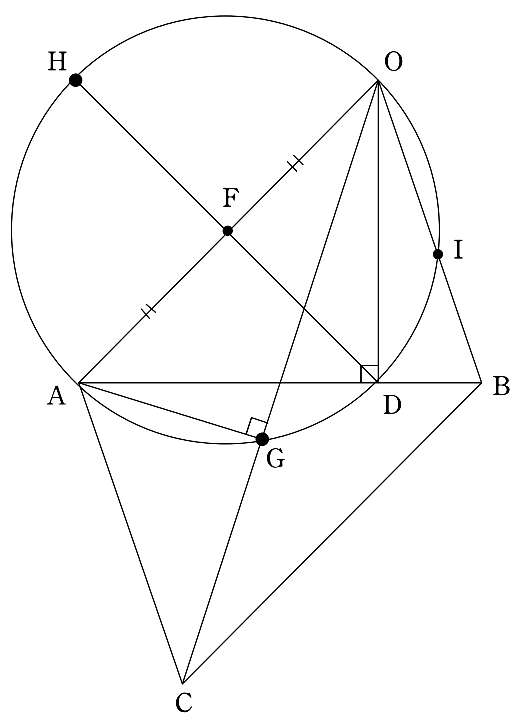
$\therefore\ -(1-t)|\vec{a}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$\therefore\ 11t-8=0$

$\therefore\ t=\dfrac{8}{11}$

これより、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{11}\vec{a}+\dfrac{8}{11}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$（$k$ は実数）とおくと



AG⊥OC より、$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$\therefore\ (\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$\therefore\ (k\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$\therefore\ k|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$\therefore\ k=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}$

ここで、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9+2\cdot1+4$

$=15$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$

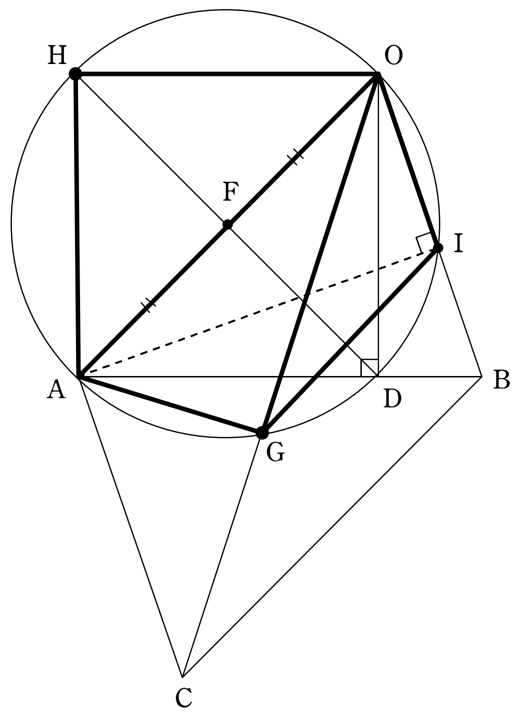
$=9+1$

$=10$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{10}{15}(\vec{a}+\vec{b})$

$=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$



△OAB の面積を U とおくと

△OBC＝△OAC＝$U=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ となる。

(1) より、AD : BD＝8 : 3 から、

$\triangle\mathrm{OAH}=\triangle\mathrm{OAD}=\dfrac{8}{11}\triangle\mathrm{OAB}$

よって、$\triangle\mathrm{OAH}=\dfrac{8}{11}U$

(2) より、OG : GC＝2 : 1 から

$\triangle\mathrm{OAG}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{OAC}$

よって、$\triangle\mathrm{OAG}=\dfrac{2}{3}U$

△OAI において、

$\mathrm{OI}=\mathrm{OA}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}=3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

よって、$\triangle\mathrm{OIG}=\dfrac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OB}}\cdot\dfrac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OC}}\triangle\mathrm{OBC}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}U$

$=\dfrac{1}{6}U$

よって、$\dfrac{S}{T}=\dfrac{\triangle\mathrm{OAD}}{\triangle\mathrm{OAH}+\triangle\mathrm{OAG}+\triangle\mathrm{OGI}}$

$=\dfrac{\frac{8}{11}U}{\frac{8}{11}U+\frac{2}{3}U+\frac{1}{6}U}$

$=\dfrac{48}{103}$

3 自然数 n に対して、定義域を $x \leqq 1$ とする 2 つの関数

$$f_n(x)=x(1-x)^n、g_n(x)=x^2(1-x)^n$$

を定める。

(1) $f_2(x)$ の導関数は、

$$f_2'(x)=\left(x-\boxed{ア}\right)\left(\boxed{イ}x-\boxed{ウ}\right)$$

であり、$f_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。また、$g_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。

(2) すべての自然数 n に対して、

$$f_n(x)-g_n(x)=f_{n+\boxed{コ}}(x)$$

が成り立つ。

(3) $f_n(x)$ の導関数は、

$$f_n'(x)=\boxed{サ}\left\{\left(n+\boxed{シ}\right)x-\boxed{ス}\right\}(1-x)^{n-1}$$

であり、$g_n(x)$ の導関数は、

$$g_n'(x)=\boxed{セ}\left\{\left(n+\boxed{ソ}\right)x-\boxed{タ}\right\}x(1-x)^{n-1}$$

である。

(4) 2 つの曲線 $y=f_n(x)$、$y=g_n(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とすると、

$$S_n=\frac{\boxed{チ}}{\left(n+\boxed{ツ}\right)\left(n+\boxed{テ}\right)}$$

である。ただし、$\boxed{ツ}<\boxed{テ}$ とする。

また、関数 $f_n(x)$ が極大値をとるときの x の値を p_n とおくとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_nS_n=\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}$$

である。

解説

(1) $f_2(x)=x(1-x)^2$ より

$$f_2'(x)=(1-x)^2-2x(1-x)$$
$$=(1-x)\{(1-x)-2x\}$$
$$=(x-1)(3x-1)$$

より、増減表は以下のようになる。

x		$\frac{1}{3}$		1
$f_2'(x)$	＋	0	－	
$f_2(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

よって、$f_2(x)$ の極大値は $\dfrac{4}{27}$

また、$g_2(x)=x^2(1-x)^2$ より

$$g_2'(x)=2x(1-x)^2+x^2\cdot(-2x)(1-x)$$
$$=2x(1-x)\{(1-x)^2-x^2\}$$
$$=2x(x-1)(2x-1)$$

より、増減表は以下のようになる。

x		0		$\frac{1}{2}$		1
$g_2'(x)$	－	0	＋	0	－	
$g_2(x)$	↘	0	↗	$\frac{1}{16}$	↘	0

よって、$g_2(x)$ の極大値は $\dfrac{1}{16}$

(2)
$$f_n(x)-g_n(x)=x(1-x)^n-x^2(1-x)^n$$
$$=x(1-x)^n(1-x)$$
$$=x(1-x)^{n+1}$$
$$=f_{n+1}(x)$$

(3)
$$f_n'(x)=(1-x)^n+x\cdot(-n)(1-x)^{n-1}$$
$$=(1-x)^{n-1}\{(1-x)-nx\}$$
$$=-\{(n+1)x-1\}(1-x)^{n-1}$$
$$g_n'(x)=2x(1-x)^n+x^2\cdot(-n)(1-x)^{n-1}$$
$$=x(1-x)^{n-1}\{2(1-x)-nx\}$$
$$=-\{(n+2)x-2\}x(1-x)^{n-1}$$

(4) $y=f_n(x)$、$y=g_n(x)$ の交点より

$$f_n(x)=g_n(x)$$
$$\therefore\quad f_n(x)-g_n(x)=0$$
$$\therefore\quad f_{n+1}(x)=0 \qquad (\because (2))$$
$$\therefore\quad x(1-x)^{n+1}=0$$
$$\therefore\quad x=0、1$$

よって、$0 \leqq x \leqq 1$ において

$f_n(x)-g_n(x)=f_{n+1}(x) \geqq 0$ より

$$S_n=\int_0^1\{f_n(x)-g_n(x)\}dx$$
$$=\int_0^1 f_{n+1}(x)dx$$
$$=\int_0^1 x(1-x)^{n+1}dx \quad \cdots\cdots (※)$$

$1-x=t$ とおくと、$-dx=dt$

$x:0\to1$ のとき、$t:1\to0$ より

$$S_n=\int_1^0(1-t)t^{n+1}(-dt)$$
$$=\int_0^1(t^{n+1}-t^{n+2})dt$$
$$=\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}-\frac{t^{n+3}}{n+3}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$
$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

また、(3) から

$$f_n'(x)=-\{(n+1)x-1\}(1-x)^{n-1}$$

より、増減表は以下のようになる。

x		$\frac{1}{n+1}$		1
$f_n'(x)$	＋	0	－	
$f_n(x)$	↗	極大	↘	0

よって、$x=\dfrac{1}{n+1}$ で極大値をとるので、$p_n=\dfrac{1}{n+1}$

これより

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_nS_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}$$
$$=\frac{1}{12}$$

別解　(※) について

参考　ベータ関数の積分

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1} \quad (m、n \text{ は非負整数})$$

上記 参考 を、$\alpha=0$、$\beta=1$、$m=1$、n を $n+1$ として利用すると

$$S_n=\int_0^1 x(1-x)^{n+1}dx$$
$$=(-1)^{n+1}\int_0^1 x(x-1)^{n+1}dx$$
$$=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n+1}\frac{1!(n+1)!}{(1+(n+1)+1)!}(1-0)^{1+(n+1)+1}$$
$$=\frac{(n+1)!}{(n+3)!}$$
$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

以下略