1 表裏のある６枚のカードを横一列にすべて裏向きで並べる。この６枚のカードに対して、次の３つの操作を、操作１、操作２、操作３の順に行う。

・操作１：６枚のカードの中から１枚のカードを無作為に選んで裏返す。
・操作２：６枚のカードの中から、隣り合う２枚のカードを無作為に選び、これら２枚のカードを裏返す。
・操作３：６枚のカードの中から、連続して並ぶ３枚のカードを無作為に選び、これら３枚のカードを裏返す。

ここで、カードを裏返すとは、表を向いているカードは裏を向け、裏を向いているカードは表を向けることを意味する。以下の確率を求めよ。なお、各設問の答えは既約分数で表すこと。

(1) 操作２が終了した時点でちょうど３枚のカードが表を向いている確率
(2) 操作３が終了した時、６枚のカードがすべて表を向いている確率
(3) 操作３が終了した時、ちょうど４枚のカードが表を向いている確率
(4) 操作３が終了した時、ちょうど２枚のカードが表を向いている確率

(解説)

カードの位置を左から1、2、3、4、5、6とし、カード１を裏返すとは、左から１番目のカードを裏返すこととする。
また、操作１の全事象は6通り、操作２の全事象は5通り、操作３の全事象は4通りである。

(1) 操作２が終了した時点でちょうど３枚のカードが表を向いているのは以下のときである。ただし、1とは、カード１を裏返し、(1、2)はカード１と２を裏返すことを意味する。

	操作１	操作２
(ⅰ)	1	(2、3)、(3、4)、(4、5)、(5、6)
(ⅱ)	2	(3、4)、(4、5)、(5、6)
(ⅲ)	3	(1、2)、(4、5)、(5、6)

操作１で、4、5、6のときは、対称性より(ⅰ)～(ⅲ)と同様に考えられる。

(ⅰ)のとき、確率は $\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{30}$

(ⅱ)のとき、確率は $\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{30}$

(ⅲ)のとき、確率は $\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{30}$

(ⅰ)～(ⅲ)と対称性より、求める確率は、$\frac{(4+3+3)\times2}{30}=\frac{2}{3}$

別解　操作１と操作２の順番を入れ替えても確率は不変より
操作２で隣り合う２枚を選び、次に操作１で表になった２枚以外の４枚から１枚選べば、ちょうど３枚のカードが表となるので求める確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) 操作３が終了した時、６枚のカードが表を向いているのは以下のときである。
ただし、(1、2、3)とはカード１と２と３を裏返すことを意味する。

	操作１	操作２	操作３
(ⅰ)	1	(2、3)	(4、5、6)
(ⅱ)	1	(5、6)	(2、3、4)
(ⅲ)	3	(1、2)	(4、5、6)

操作１で、4、5、6のときは、対称性より(ⅰ)～(ⅲ)と同様に考えられる。

(ⅰ)～(ⅲ)と対称性より、求める確率は、$\frac{3\times2}{6\times5\times4}=\frac{1}{20}$

(3) 操作３が終了した時、ちょうど４枚のカードが表を向いているのは、操作１～３で１枚被るときである。
(ⅰ) 操作１と操作２で１枚カードが被るとき、

	操作１	操作２	操作３
①	1	(1、2)	(3、4、5)、(4、5、6)
②	2	(1、2)	(2、3、4)、(3、4、5)、(4、5、6)
③	2	(2、3)	(4、5、6)
④	3	(2、3)	(3、4、5)、(4、5、6)
⑤	3	(3、4)	(1、2、3)

操作１で、4、5、6のときは、対称性より①～⑤と同様に考えられる。
①～⑤と対称性より、$9\times2=18$ 通り

(ⅱ) 操作１と操作３または操作２と操作３で１枚カードが被るとき

	操作１	操作２	操作３
⑥	1	(2、3)	(3、4、5)
⑦	1	(3、4)	(4、5、6)
⑧	1	(4、5)	(1、2、3)、(2、3、4)
⑨	1	(5、6)	(1、2、3)、(3、4、5)
⑩	2	(3、4)	(4、5、6)
⑪	2	(4、5)	(1、2、3)
⑫	2	(5、6)	(1、2、3)、(2、3、4)、(3、4、5)
⑬	3	(1、2)	(3、4、5)
⑭	3	(4、5)	(1、2、3)
⑮	3	(5、6)	(1、2、3)、(2、3、4)

操作１で、4、5、6のときは、対称性より⑥～⑮と同様に考えられる。
⑥～⑮と対称性より、$15\times2=30$ 通り

以上より、求める確率は、$\frac{18+30}{120}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

(4) 操作３が終了した時、でちょうど２枚のカードが表を向いているのは、操作１～３で２枚被るときである。
(ⅰ) 操作１と操作２で１枚カードが被り、表になったカードと操作３で被るとき

	操作１	操作２	操作３
①	1	(1、2)	(1、2、3)、(2、3、4)
②	2	(1、2)	(1、2、3)
③	2	(2、3)	(1、2、3)、(2、3、4)、(3、4、5)
④	3	(2、3)	(1、2、3)、(2、3、4)
⑤	3	(3、4)	(2、3、4)、(3、4、5)、(4、5、6)

操作１で、4、5、6のときは、対称性より①～⑤と同様に考えられる。
①～⑤と対称性より、$11\times2=22$ 通り

(ⅱ) 操作１と操作２で１枚もカードが被らないとき

	操作１	操作２	操作３
⑥	1	(2、3)	(2、3、4)
⑦	1	(3、4)	(1、2、3)、(2、3、4)、(3、4、5)
⑧	1	(4、5)	(3、4、5)、(4、5、6)
⑨	1	(5、6)	(4、5、6)
⑩	2	(3、4)	(1、2、3)、(3、4、5)
⑪	2	(4、5)	(2、3、4)、(3、4、5)、(4、5、6)
⑫	2	(5、6)	(4、5、6)
⑬	3	(1、2)	(2、3、4)
⑭	3	(4、5)	(2、3、4)、(4、5、6)
⑮	3	(5、6)	(3、4、5)、(4、5、6)

操作１で、4、5、6のときは、対称性より⑥～⑮と同様に考えられる。
⑥～⑮と対称性より、$18\times2=36$ 通り

以上より、求める確率は、$\frac{22+36}{120}=\frac{58}{120}=\frac{29}{60}$

別解　操作３、操作２、操作１の順で考える。
以下の表は、操作２と操作３を行ったときの結果である。
表：1は、表がカード１だけを、表：1、2は表がカード１と２だけを意味し、
裏：1は、裏がカード１だけを意味している。

	(1、2、3)	(2、3、4)	(3、4、5)	(4、5、6)
(1、2)	表：3	表：1、3、4	裏：6	裏：3
(2、3)	表：1	表：4	表：2、4、5	裏：1
(3、4)	表：1、2、4	表：2	表：5	表：3、5、6
(4、5)	裏：6	表：2、3、5	表：3	表：6
(5、6)	裏：4	裏：1	表：3、4、6	表：4

(2) 操作３が終了した時、ちょうど６枚のカードが表となるのは、操作２と３が終わった時点で裏のカードが１枚で、操作１でその裏のカードを表にしたときである。
操作２と３が終わった時点で裏のカードが１枚であるのは、6通り。

よって、求める確率は、$\frac{6}{4\times5\times6}=\frac{1}{20}$

(3) 操作３が終了した時、ちょうど４枚のカードが表となるのは、以下のときである。
(ⅰ) 操作２と３が終わった時点で表のカードが３枚で、操作１で裏のカードを１枚選んだとき
(ⅱ) 操作２と３が終わった時点で表のカードが５枚で、操作１で表のカードを１枚選んだとき
(ⅰ)のとき、表のカードが３枚となるのは、6通りで、裏のカードの選び方は、各々3通りより、$6\times3=18$ 通り
(ⅱ)のとき、表のカードが５枚となるのは、6通りで、表のカードの選び方は、各々5通りより、$6\times5=30$ 通り

よって求める確率は、$\frac{18+30}{120}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

(4) 操作３が終了した時、でちょうど２枚のカードが表を向いているのは、
(ⅰ) 操作２と３が終わった時点で表のカードが１枚で、操作１で裏のカードを１枚選んだとき

（ⅱ） 操作 2 と 3 が終わった時点で表のカードが 3 枚で、操作 1 で表のカードを 1 枚選んだとき

（ⅰ）のとき、表のカードが 1 枚となるのは、8 通りで、裏のカードの選び方は、各々 5 通りより、$8\times5=40$ 通り

（ⅱ）のとき、表のカードが 3 枚となるのは、6 通りで、表のカードの選び方は、各々 3 通りより、$6\times3=18$ 通り

よって求める確率は、$\dfrac{40+18}{120}=\dfrac{58}{120}=\dfrac{29}{60}$

2 $0\leqq x$ の範囲で定義される関数 $f(x)=2\sqrt{x}$ と $g(x)=\dfrac{6x}{2x+1}$ がある。$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を S とするとき、以下の設問に答えよ。

(1) S の値を求めよ。

(2) $0<S<\dfrac{1}{8}$ であることを示せ。なお必要があれば、自然対数の底 e が $2.71<e<2.72$ を満たすことを用いてよい。

解説

(1) $f(x)-g(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{6x}{2x+1}$

$$=\frac{2(2x+1)\sqrt{x}-6x}{2x+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}(2x+1-3\sqrt{x})}{2x+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{2x+1}$$

よって、$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点は、$f(x)-g(x)=0$ より、$x=0$、$\dfrac{1}{4}$、1

また、$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき、$f(x)\geqq g(x)$

$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 1$ のとき、$g(x)\geqq f(x)$

となるので、求める面積は

$$S=\int_0^{\frac{1}{4}}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(2\sqrt{x}-\frac{6x}{2x+1}\right)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{6x}{2x+1}-2\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(2\sqrt{x}-3+\frac{3}{2x+1}\right)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(3-\frac{3}{2x+1}-2\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+\frac{3}{2}\log|2x+1|\right]_0^{\frac{1}{4}}+\left[3x-\frac{3}{2}\log|2x+1|-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^{1}$$

$$=2\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-3\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}\right\}-0+\left(3-\frac{3}{2}\log 3-\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+3\log\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\log 3$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(2\log\frac{3}{2}-\log 3\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\log\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\log\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log\frac{4}{3}$$

(2) 面積より、$S>0$ は自明。

よって、$S<\dfrac{1}{8}$ を示す。

つまり、$\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\log\dfrac{4}{3}<\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}\log\dfrac{4}{3}<-\dfrac{3}{8}$

$\therefore\ \log\dfrac{4}{3}>\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \log\dfrac{4}{3}>\log e^{\frac{1}{4}}$

$\therefore\ e^{\frac{1}{4}}<\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ e<\left(\dfrac{4}{3}\right)^4=\dfrac{256}{81}$

を示せばよい。

$\dfrac{256}{81}=3\dfrac{13}{81}$ で、$2.71<e<2.72$ より、$e<\dfrac{246}{81}$ となる。

よって、$0<S<\dfrac{1}{8}$ は成り立つ。

3 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和を S_n とする。
$\{a_n\}$ を $a_1=2$、$a_{n+1}=S_n-n(n-4)$ $(n=1、2、3、\cdots\cdots)$ で定めるとき、a_n と S_n をそれぞれ n の式で表せ。

解説

$a_{n+1}=S_n-n(n-4)$ ……… ① より

$$a_n=S_{n-1}-(n-1)(n-5)\quad(n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

$n\geqq 2$ のもとで、①－② より

$$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}-(n^2+4n)+(n^2-6n+5)$$
$$\therefore\ a_{n+1}-a_n=a_n-2n+5$$
$$\therefore\ a_{n+1}=2a_n-2n+5\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで、① で $n=1$ を代入すると、$a_2=a_1+3=5$

③ で $n=1$ を代入すると、$a_2=2a_1-2+5$

$$\therefore\ 5=2a_1+3$$
$$\therefore\ a_1=1$$

$a_1=2$ に反するので、③ は $n\geqq 2$ のときのみ成り立つ。　………(※)

また、③ より、$a_{n+2}=2a_{n+1}-2(n+1)+5$

$$\therefore\ a_{n+2}=2a_{n+1}-2n+3\ (n\geqq 1)\ \cdots\cdots\cdots ④$$

$n\geqq 2$ のもとで、④－③ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-2$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$$b_{n+1}=2b_n-2\quad(n\geqq 2)$$
$$\therefore\ b_{n+1}-2=2(b_n-2)$$
$$\therefore\ b_n-2=2^{n-2}(b_2-2)$$
$$\therefore\ b_n=2^{n-2}(b_2-2)+2$$

ここで、③ で $n=2$ を代入すると、$a_3=2a_2-4+5=11$

よって、$b_2=a_3-a_2=11-5=6$ となるので

$$b_n=4\cdot 2^{n-2}+2$$
$$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2^n+2\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③ を⑤ に代入して

$$2a_n-2n+5-a_n=2^n+2$$
$$\therefore\ a_n=2^n+2n-3$$

よって、$\begin{cases} n=1\ \text{のとき、}a_1=2 \\ n\geqq 2\ \text{のとき、}a_n=2^n+2n-3 \end{cases}$

また、① より

$$S_n=a_{n+1}+n(n-4)$$

ここで、$n\geqq 1$ で、$a_{n+1}=2^{n+1}+2(n+1)-3=2^{n+1}+2n-1$ より

$$S_n=2^{n+1}+2n-1+n(n-4)$$
$$=2^{n+1}+n^2-2n-1$$

別解　(※) の続き

③ が、$a_{n+1}-a(n+1)-b=2(a_n-an-b)$ と変形できるとすると

③ を代入して

$$2a_n-2n+5-a(n+1)-b=2(a_n-an-b)$$
$$\therefore\ 2a_n-(a+2)n+5-a-b=2a_n-2an-2b$$

両辺係数比較をして

$$\begin{cases} a+2=2a \\ 5-a-b=-2b \end{cases}\qquad \therefore\ a=2、b=-3$$

よって、③ は、$a_{n+1}-2(n+1)+3=2(a_n-2n+3)$ と変形できる。

$n\geqq 2$ のもとで

$$a_{n+1}-2(n+1)+3=2(a_n-2n+3)$$
$$\therefore\ a_n-2n+3=2^{n-2}(a_2-2\cdot 2+3)$$
$$\therefore\ a_n-2n+3=4\cdot 2^{n-2}$$
$$\therefore\ a_n=2^n+2n-3\ (n\geqq 2)$$

以下略

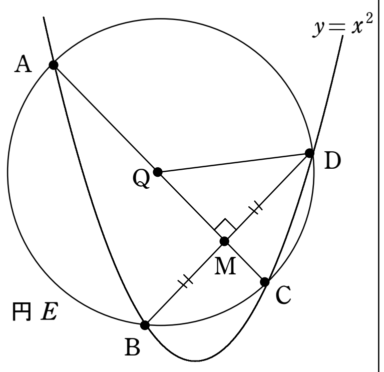
4　xy 平面上の放物線H：$y=x^2$ と、中心を Q とする円 E が異なる 4 点 A、B、C、D で交わっており、A、B、C、D の x 座標をそれぞれ a、b、c、d（ただし、$a<b<c<d$）とする。ここで、直線 AC と直線 BD が直交し、線分 BD の中点 M は直線 AC 上にあり、$\mathrm{AC}=\sqrt{2}\,\mathrm{BD}$ であるとする。以下の設問に答えよ。

(1)　$a+c$ の値を求めよ。

(2)　Q と M の x 座標をそれぞれ求めよ。

(3)　円 E の方程式を求めよ。

（解説）



(1)　直線 AC の傾きは、$\dfrac{c^2-a^2}{c-a}=a+c$

直線 BD の傾きは、$\dfrac{d^2-b^2}{d-b}=b+d$

AC⊥BD より、$(a+c)(b+d)=-1$ ……… ①

また、直線 AD の傾きは、$\dfrac{d^2-a^2}{d-a}=a+d$

直線 CD の傾きは、$\dfrac{d^2-c^2}{d-c}=c+d$

AC は直径より、AD⊥CD

よって、　$(a+d)(c+d)=-1$

$\therefore\ ac+ad+cd+d^2=-1$ ……… ②

同様にして、AB ⊥ BC より

$(a+b)(b+c)=-1$

$\therefore\ ab+ac+b^2+bc=-1$ ……… ③

②、③ より

$ac+ad+cd+d^2=ab+ac+b^2+bc$

$\therefore\ ad+cd+d^2=ab+b^2+bc$

$\therefore\ a(d-b)+c(d-b)+(d-b)(d+b)=0$

$\therefore\ (d-b)(a+c+b+d)=0$

$b\neq d$ より、$a+b+c+d=0$ ……… ④

$\therefore\ b+d=-(a+c)$

① に代入して

$-(a+c)^2=-1$

$\therefore\ a+c=\pm1$

$a<b<c<d$ より、$a+c<b+d$

よって、$a+c=-1$　…… ⑤

④ より、$b+d=1$

別解　円 E 上の点 P を$(x,\ y)$とすると、AC は円 E の直径より、

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$

$\therefore\ \begin{pmatrix}x-a\\ y-a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-c\\ y-c^2\end{pmatrix}=0$

$\therefore\ (x-a)(x-c)+(y-a^2)(y-c^2)=0$

$y=x^2$ と異なる 4 点 A、B、C、D で交わるので

$(x-a)(x-c)+(x^2-a^2)(x^2-c^2)=0$

$\therefore\ (x-a)(x-c)+(x-a)(x+a)(x-c)(x+c)=0$

$\therefore\ (x-a)(x-c)\{(x+a)(x+c)+1\}=0$

が、$x=a$、b、c、d を解にもつ。

つまり、$(x+a)(x+c)+1=0$ が、$x=b$、d を解にもつ。

よって、$x^2+(a+c)x+ac+1=0$ が $x=b$、d を解にもつので

解と係数の関係より、$b+d=-(a+c)$ ……… ④

ここで、直線 AC の傾きは、$\dfrac{c^2-a^2}{c-a}=a+c$

直線 BD の傾きは、$\dfrac{d^2-b^2}{d-b}=b+d$

AC⊥BD より、$(a+c)(b+d)=-1$ ……… ①

①、④ より、$-(a+c)^2=-1$

$\therefore\ a+c=\pm1$

$a<b<c<d$ より、$a+c<b+d$

よって、$a+c=-1$　…… ⑤

④ より、$b+d=1$

(2)　Q は AC の中点より、Q の x 座標は $\dfrac{a+c}{2}=-\dfrac{1}{2}$

M は BD の中点より、M の x 座標は $\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{1}{2}$

(3)　AC、QM の傾きは -1 より

$\mathrm{AC}=\sqrt{1+(-1)^2}\,(c-a)=\sqrt{2}\,(c-a)$　…… ⑥

$\mathrm{QM}=\sqrt{1+(-1)^2}\left|\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{2}$ …… ⑦

円 E の半径を r とすると、$\mathrm{QD}=r$、$\mathrm{AC}=2r$ となる。

よって、$\mathrm{AC}=\sqrt{2}\,\mathrm{BD}$ より、$2r=\sqrt{2}\,\mathrm{BD}$

$\therefore\ \mathrm{BD}=\sqrt{2}\,r$

△QMD で三平方の定理より

$r^2=(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2$　（∵ ⑥、⑦）

$\therefore\ r^2=4$

$r>0$ より、$r=2$

よって、$\mathrm{AC}=4$

⑥ より、$\sqrt{2}\,(c-a)=4$

$\therefore\ c-a=2\sqrt{2}$

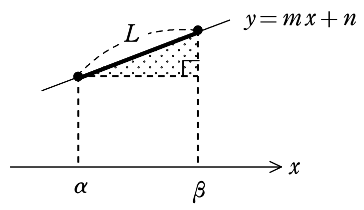
よって、Q の y 座標は $\dfrac{a^2+c^2}{2}=\dfrac{(a+c)^2+(c-a)^2}{4}=\dfrac{9}{4}$

となるので、円 E の方程式は

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=4$$

参考　⑥、⑦ について

右図において、三平方の定理より



$L^2=(\beta-\alpha)^2+\{(m\beta+n)-(m\alpha+n)\}^2$

$=(\beta-\alpha)^2+\{m(\beta-\alpha)\}^2$

$=(1+m^2)(\beta-\alpha)^2$

よって、$L=\sqrt{1+m^2}\,|\beta-\alpha|$