1 n を 3 以上の整数とする。2 つの変量 x、y のデータが、n 個の x、y の値の組として $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$、……、$(x_n,\ y_n)$ で与えられている。この k 番目 $(1\leqq k\leqq n)$ のデータが定数 a $\left(0\leqq a\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて次のように表されているとき、以下の設問に答えよ。

$$(x_k,\ y_k)=\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right),\ \cos\left(\frac{2k\pi}{n}-a\right)\right)$$

(1) 絶対値が 1 である複素数 α、β について、$\alpha\fallingdotseq 1$、$\alpha^n=1$ であるとき、次の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\beta$$

(2) x と y の相関係数を求めよ。

解説

(1) $\alpha\fallingdotseq 1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\beta=\beta\sum_{k=1}^{n}\alpha^k$$
$$=\beta\cdot\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}$$

$\alpha^n=1$ より、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\beta=0$

別解 $\alpha^n=1$ より、$\alpha^n-1=0$

よって、$(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha+1)=0$

$\alpha\fallingdotseq 1$ より、$\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha+1=0$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=-1$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\beta=\beta\sum_{k=1}^{n}\alpha^k$

$$=\beta\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k+\alpha^n\right)$$
$$=\beta(-1+1)$$
$$=0$$

(2) x、y の分散をそれぞれ、$v_x{}^2$、$v_y{}^2$、x と y の共分散を s_{xy} とすると、x と y の相関係数 r は、$r=\dfrac{s_{xy}}{\sqrt{v_x{}^2}\cdot\sqrt{v_y{}^2}}$ となる。

$z_k=\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}+a\right)+i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}+a\right)$ とおくと

$$z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)$$
$$=(\cos a+i\sin a)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$=(\cos a+i\sin a)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$、$\beta=\cos a+i\sin a$ とすると

$z_k=\alpha^k\beta$、$\alpha^n=1$、$n\geqq 3$ より、$\alpha\fallingdotseq 1$となるので、(1) より

$$\sum_{k=1}^{n}z_k=0$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)\right)=0$$

$\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}+a\right)$、$\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}+a\right)$ はともに実数より

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)=0$$

よって、x の平均 $\overline{x}$ は、

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)=0$$

となる。これより

$$v_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)\right)^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\frac{4k\pi}{n}+2a\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{4k\pi}{n}+2a\right)$$

ここで、$z_k{}^2=\left\{\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}+a\right)+i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}+a\right)\right\}^2$

$$=\cos\left(\frac{4k\pi}{n}+2a\right)+i\sin\left(\frac{4k\pi}{n}+2a\right)$$
$$=(\cos 2a+i\sin 2a)\left(\cos\frac{4k\pi}{n}+i\sin\frac{4k\pi}{n}\right)$$
$$=(\cos 2a+i\sin 2a)\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)^k$$

よって、$\alpha'=\cos\dfrac{4k\pi}{n}+i\sin\dfrac{4k\pi}{n}$、$\beta'=\cos 2a+i\sin 2a$ とすると

$z_k{}^2=(\alpha')^k\beta'$、$(\alpha')^n=1$、$n\geqq 3$ より、$\alpha'\fallingdotseq 1$となるので、(1) より

$$\sum_{k=1}^{n}z_k{}^2=0$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}+2a\right)+i\sin\left(\frac{4k\pi}{n}+2a\right)\right)=0$$

$\cos\left(\dfrac{4k\pi}{n}+2a\right)$、$\sin\left(\dfrac{4k\pi}{n}+2a\right)$ はともに実数より

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{4k\pi}{n}+2a\right)=0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

よって、$v_x{}^2=\dfrac{1}{2}$

y について、x の a を $-a$ にすればよいので、同様にして、$v_y{}^2=\dfrac{1}{2}$ となる。

共分散 s_{xy} について

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}-a\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4k\pi}{n}+\cos 2a\right)$$
$$=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{4k\pi}{n}+\frac{1}{2}\cos 2a$$

① で $a=0$ とすると、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{4k\pi}{n}=0$

よって、$s_{xy}=\dfrac{1}{2}\cos 2a$

以上より、$r=\dfrac{\frac{1}{2}\cos 2a}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}=\cos 2a$

2　n を正の整数とする。a_n、a_{n-1}、……、a_2、a_1 を、それぞれ 0 または 1 とするとき、
$a_n\times(-2)^{n-1}+a_{n-1}\times(-2)^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\times(-2)^1+a_1$ と表される整数を
$[a_n\,a_{n-1}\cdots\cdots a_2\,a_1]$ と表現する。例えば、

$[110]=1\times(-2)^2+1\times(-2)+0=2$

$[1110]=1\times1\times(-2)^3+(-2)^2+1\times(-2)+0=-6$　である

また、ある n に対して、$[a_n\,a_{n-1}\cdots\cdots a_2\,a_1]$ と表すことのできる整数全体の集合を S_n とする。例えば、$S_1=\{0、1\}$、$S_2=\{-2、-1、0、1\}$ である。

(1)　S_3 を要素を書き並べて表せ。答えだけで良い。

(2)　S_n の要素は連続する 2^n 個の整数であることを示せ。さらに S_n の要素 x に対して $x=[a_n\,a_{n-1}\cdots\cdots a_2\,a_1]$ と表すことのできる a_n、a_{n-1}、……、a_2、a_1 の組は、ただ 1 通りであることを示せ。

(3)　-24 を $[a_n\,a_{n-1}\cdots\cdots a_2\,a_1]$ と表せ。

(4)　2024 を $[a_n\,a_{n-1}\cdots\cdots a_2\,a_1]$ と表せ。

解説

(1)　$[111]=4-2+1=3$　　$[110]=4-2=2$

$[101]=4+1=5$　　$[100]=4$

$[011]=-2+1=-1$　　$[010]=-2$

$[001]=1$　　$[000]=0$

よって、$S_3=\{-2、-1、0、1、2、3、4、5\}$

(2)　(前半)　数学的帰納法で示す。

（ⅰ）　$n=1$ のとき、成立。

（ⅱ）　$n=k$ のとき、S_k の要素が連続する 2^k 個の整数であると仮定する。

$n=k+1$ のとき、S_{k+1} の要素において

①：$a_{k+1}=0$ ならば、S_k と一致

②：$a_{k+1}=1$ ならば、S_k の要素に $(-2)^k=\begin{cases}2^k\ (k\text{ が偶数})\\ -2^k\ (k\text{ が奇数})\end{cases}$ を加えたもの、

つまり S_k を 2^k 個または -2^k 個ずらしたことになる。……(※)

①、② より、S_{k+1} の要素は連続する 2^{k+1} 個の整数となる。

よって、題意は示された。

（後半）a_n、a_{n-1}、……、a_2、a_1 はそれぞれ 0 または 1 の 2 通りずつあるので、
a_n、a_{n-1}、……、a_2、a_1 の組の総数は 2^n 通りである。
これは S_n の要素の個数と一致するので、$x=[a_n\,a_{n-1}\cdots\cdots a_2\,a_1]$ と表すことができる a_n、a_{n-1}、……、a_2、a_1 の組は、ただ 1 通りである。

参考　(※) について

・S_2 から S_3 を考える。

①：$S_2=\{-2、-1、0、1\}$ に、②：「S_2 の要素に $(-2)^2=4$ を加えたもの」を並べると

$$S_3=\{\underbrace{-2、-1、0、1}_{①}、\underbrace{2、3、4、5}_{②}\}$$

4 を加える（4 ずらす）

連続する 2^n 個の整数を、そこから 2^n 個（右 or 左）ずらせば、元の 2^n 個の整数と合わせて連続する 2^{n+1} 個の整数となる。

(3)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(-2)^k$	0	-2	4	-8	16	-32	64	-128	256	-512	1024	-2048	4096

上の表より、-24 となるのは、

$(-32)+(16)+(-8)=(-2)^5+(-2)^4+(-2)^3$

のときより

$-24=[111000]$

(4)　上の表より、2024 となるのは、

$(4096)+(-2048)+(-24)=(-2)^{12}+(-2)^{11}+(-2)^5+(-2)^4+(-2)^3$

のときより

$2024=[1100000111000]$

3　複素数平面上に、原点 O と点 A (a) をとる。ただし a は実数の定数で $0<a$ を満たす。点 z が線分 OA の垂直二等分線上を動くとき、$w_1=z^2$ で表される点 w_1 と $w_2=-\dfrac{1}{z}$ で表される点 w_2 が描く図形をそれぞれ C、D とする。C と D の共有点の個数を求めよ。

解説

点 z が線分 OA の垂直二等分線上の点より、$z=\dfrac{a}{2}+bi$ (b は実数) と表される。

よって、$w_1=x+yi$ (x、y は実数) とおくと、$w_1=z^2$ より

$$x+yi=\left(\frac{a}{2}+bi\right)^2$$

$$\therefore\quad x+yi=\frac{a^2}{4}-b^2+abi$$

a、b は実数より、$\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{4}-b^2 \ \cdots\cdots ① \\ y=ab \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

② より、$a>0$ から、$b=\dfrac{y}{a}$

① に代入して、$x=\dfrac{a^2}{4}-\left(\dfrac{y}{a}\right)^2$

$$\therefore\quad y^2=-a^2\left(x-\frac{a^2}{4}\right) \cdots\cdots ③$$

$y^2=-a^2x$ の焦点が $\left(-\dfrac{a^2}{4}、0\right)$、準線が $x=\dfrac{a^2}{4}$ より、w_1 は xy 平面に対応させると、焦点が $(0、0)$、準線が $x=\dfrac{a^2}{2}$ である放物線となる。

また、点 z が線分 OA の垂直二等分線上の点より

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{a}{2}$$

$$\therefore\quad z+\overline{z}=a \cdots\cdots ④$$

$w_2=-\dfrac{1}{z}$ より、$z=-\dfrac{1}{w_2}$　$(w_2\fallingdotseq 0)$

④ に代入して、$-\dfrac{1}{w_2}-\dfrac{1}{\overline{w_2}}=a$

$$\therefore\quad w_2\overline{w_2}+\frac{1}{a}w_2+\frac{1}{a}\overline{w_2}=0$$

$$\therefore\quad \left(w_2+\frac{1}{a}\right)\left(\overline{w_2}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore\quad \left|w_2+\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}$$

これより、w_2 は点 $-\dfrac{1}{a}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{a}$ の円となる。（ただし、原点を除く）

xy 平面に対応させると、$\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{a^2}$　$(x\fallingdotseq 0)$　$\cdots\cdots ⑤$

③、⑤ の交点の個数より、連立して（③は原点を通らないので、$x\fallingdotseq 0$ を満たす）

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-a^2\left(x-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore\quad x^2+\left(\frac{2}{a}-a^2\right)x+\frac{a^2}{4}=0 \quad\cdots\cdots ⑥$$

⑥ の左辺を $f(x)$、判別式を D とすると

$$D=\left(\frac{2}{a}-a^2\right)^2-a^4$$

$$=\frac{4}{a^2}(1-a^3)$$

(i)　$D>0$ のとき

つまり、$0<a<1$ のとき

⑥ は異なる 2 個の実数解をもつ。

このとき、$f(x)$ の軸：$x=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^3-2}{2a}<0$、$f(0)>0$ より

⑥は負の異なる 2 つの実数解をもつので、③、⑤ が x 軸対称であることも考慮して、C、D の交点の個数は、4 個

(ii)　$D=0$ のとき

つまり、$a=1$ のとき

⑥ は重解をもつ。

このとき、⑥ より、$x^2+x+\dfrac{1}{4}=0$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{2}$$

③ より、$y^2=\dfrac{3}{4}$ から $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

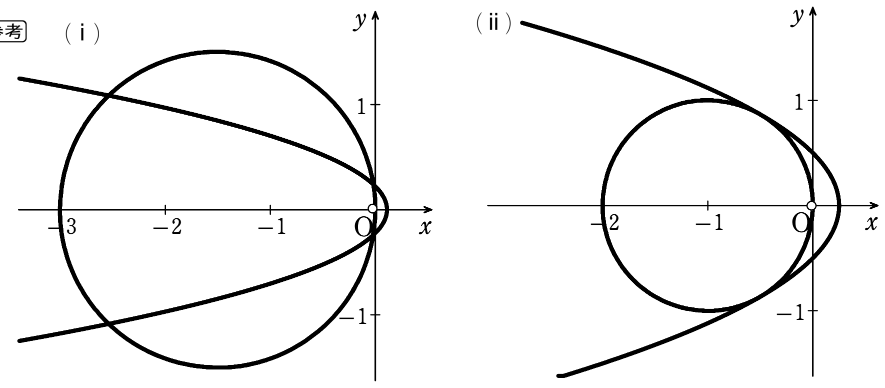
よって、　C、D の交点の個数は 2 個

(iii)　$D<0$ のとき

つまり、$a>1$ のとき

⑥ は実数解をもたないので、③、⑤ の交点の個数は 0 個

参考



別解　④ について

点 z が線分 OA の垂直二等分線上の点より、$|z|=|z-a|$ と表される。

$w_2=-\dfrac{1}{z}$ より、$z=-\dfrac{1}{w_2}$　$(w_2\fallingdotseq 0)$ を代入して

$$\left|-\frac{1}{w_2}\right|=\left|-\frac{1}{w_2}-a\right|$$

$$\therefore\quad 1=|1+aw_2|$$

$$\therefore\quad \left|w_2+\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}\quad (w_2\fallingdotseq 0)$$

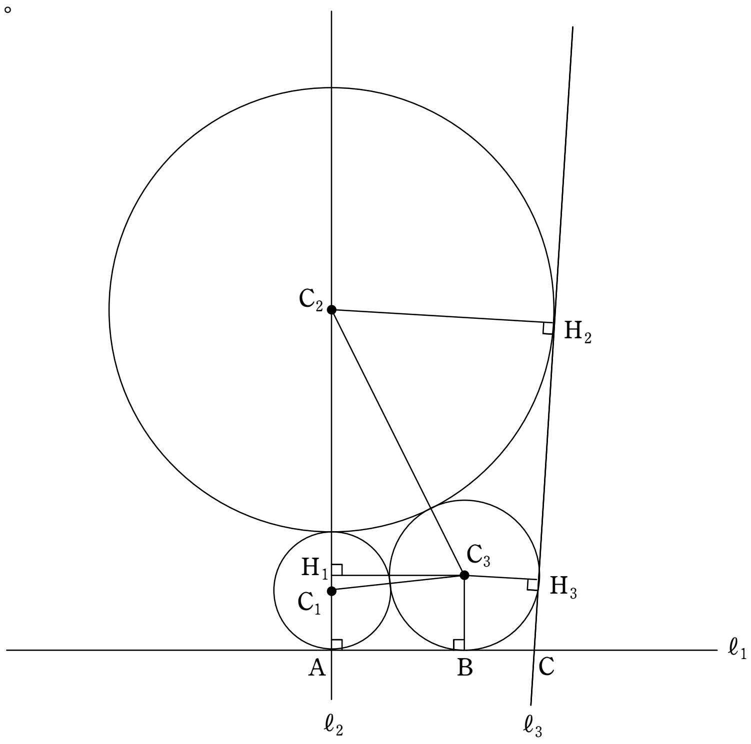
以下略

4 平面上に、半径 1 の円 O_1、半径 4 の円 O_2、半径 r の円 O_3 と、3 本の直線 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 を、次の条件をすべて満たすように定める。

・円 O_1 は直線 ℓ_1 に点 A で接し、直線 ℓ_2 は A を通って直線 ℓ_1 に直交する。
・円 O_2 は、中心が ℓ_2 上にあり、かつ A とは異なる点で O_1 に外接している。
・円 O_3 は、O_1、O_2 のどちらにも外接し、かつ ℓ_1 に点 B で接する。
・直線 ℓ_3 は、O_2 と O_3 の共通接線であり、O_1 と共有点を持たない。

ℓ_3 と ℓ_1 の交点を C、ℓ_3 と ℓ_2 の交点 D とするとき、以下の設問に答えよ。
(1) r の値を求めよ。
(2) 線分 AB の長さを求めよ。
(3) 線分 AC の長さを求めよ。
(4) 線分 AD の長さを求めよ。

解説
円 O_1、O_2、O_3 の中心をそれぞれ、C_1、C_2、C_3 とする。
また、
・C_3 から ℓ_2 に下した垂線と ℓ_2 の交点を H_1
・C_2 から ℓ_3 に下した垂線と ℓ_3 の交点を H_2
・C_3 から ℓ_3 に下した垂線と ℓ_3 の交点を H_3
とする。



(1) $\triangle C_1C_3H_1$ と $\triangle C_2C_3H_1$ でそれぞれ三平方の定理より

$$\begin{cases} C_3H_1{}^2=C_1C_3{}^2-C_1H_1{}^2 \\ C_3H_1{}^2=C_2C_3{}^2-C_2H_1{}^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} C_3H_1{}^2=(1+r)^2-(r-1)^2 \\ C_3H_1{}^2=(4+r)^2-\{4+1-(r-1)\}^2 \end{cases}$$

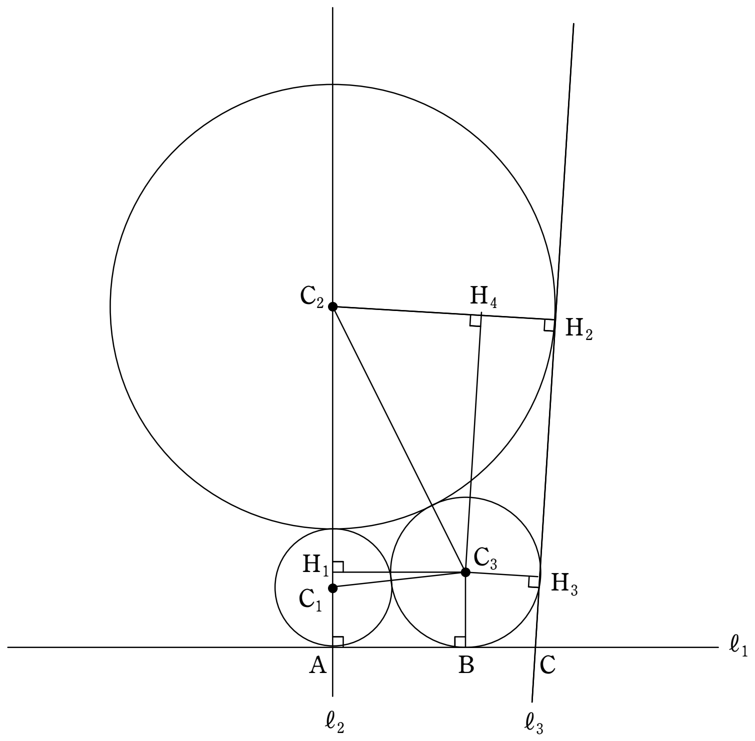
連立して、$(1+r)^2-(r-1)^2=(4+r)^2-(6-r)^2$

$$\therefore\ r=\frac{5}{4}$$

(2) $AB=C_3H_1$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}$$
$$=\sqrt{5}$$

(3) C_3 から 直線 C_2H_2 に下した垂線と ℓ_2 の交点を H_4 とすると



$\triangle C_2C_3H_4$ において三平方の定理より

$$H_2H_3{}^2=H_4C_3{}^2$$
$$=C_2C_3{}^2-C_2H_4{}^2$$
$$=\left(4+\frac{5}{4}\right)^2-\left(4-\frac{5}{4}\right)^2$$
$$=20$$

$$\therefore\ H_2H_3=2\sqrt{5}$$

$BC=CH_3=x$ とおくと
$\triangle ACC_2$ と $\triangle H_2C_2C$ でそれぞれ三平方の定理より

$$\begin{cases} CC_2{}^2=AC^2+AC_2{}^2 \\ CC_2{}^2=H_2C_2{}^2+H_2C^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} CC_2{}^2=(\sqrt{5}+x)^2+(2+4)^2 \\ CC_2{}^2=4^2+(2\sqrt{5}+x)^2 \end{cases}$$

連立して、$(\sqrt{5}+x)^2+6^2=4^2+(2\sqrt{5}+x)^2$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

よって、$AC=AB+BC$

$$=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

(4) $AD=x$、$CD=y$ とおくと
$\triangle ACD \backsim \triangle H_2C_2D$ より
$AC:H_2C_2=CD:C_2D=DA:DH_2$

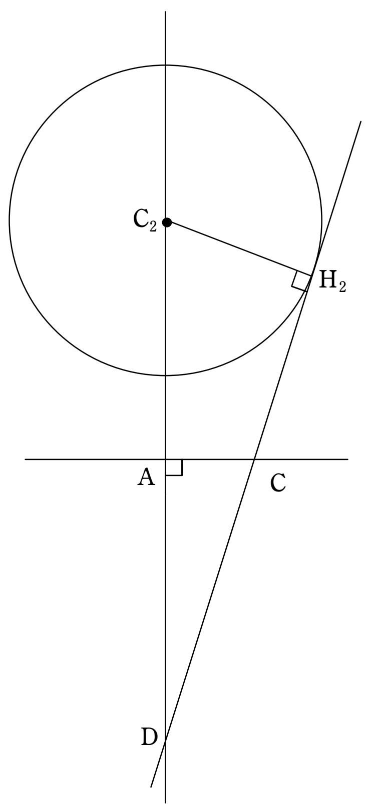
$$\therefore\ \frac{3\sqrt{5}}{2}:4=y:6+x=x:y+2\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{5}}{2}:4=y:6+x \\ \dfrac{3\sqrt{5}}{2}:4=x:y+\dfrac{5\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 4y=9\sqrt{5}+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}x \\ 4x=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}y+\dfrac{75}{4} \end{cases}$$

$$\therefore\ x=30、y=\frac{27\sqrt{5}}{2}$$

よって、$AD=30$



別解　ℓ_1 を x 軸、ℓ_2 を y 軸とすると、A $(0、0)$、C_1 $(0、1)$、C_2 $(0、6)$ となるので
円 O_1 : $x^2+(y-1)^2-1$
円 O_2 : $x^2+(y-6)^2=16$
となる。

(1) 円 O_3 の半径が r より、中心を $(p、r)$ $(p>0)$ とおく

$$\begin{cases} C_1C_3=\sqrt{p^2+(r-1)^2}=1+r \\ C_2C_3=\sqrt{p^2+(r-6)^2}=4+r \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} p^2+(r-1)^2=(1+r)^2 \\ p^2+(r-6)^2=(4+r)^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ p=\sqrt{5}、r=\frac{5}{4}$$

(2) (1) より、$AB=p=\sqrt{5}$

(3) 直線 C_2C_3 と ℓ_3 との交点を E とすると

$\triangle EC_2H_2 \backsim \triangle EC_3H_3$ で相似比は $4:\dfrac{5}{4}=16:5$ より

EはC_2、C_3を$16:5$に外分する点である。

よって、$\dfrac{-5\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}+16\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}}{16-5}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}16\sqrt{5}\\-10\end{pmatrix}$

これより、ℓ_3を$y=m\left(x-\dfrac{16\sqrt{5}}{11}\right)-\dfrac{10}{11}$

$\therefore\ 11mx-11y-16\sqrt{5}\,m-10=0$

とおくと、ℓ_3は円O_2と接するので

$$\frac{|-11\cdot 6-16\sqrt{5}\,m-10|}{\sqrt{(11m)^2+11^2}}=4$$

$\therefore\ |16\sqrt{5}\,m+76|=44\sqrt{m^2+1}$

$\therefore\ |4\sqrt{5}\,m+19|=11\sqrt{m^2+1}$

$\therefore\ 80m^2+152\sqrt{5}\,m+361=121m^2+121$

$\therefore\ 41m^2-152\sqrt{5}\,m-240=0$

$\therefore\ (41m+12\sqrt{5})(m-4\sqrt{5})=0$

$\therefore\ m=-\dfrac{12\sqrt{5}}{41}$、$4\sqrt{5}$

$m>0$より、ℓ_3は$y=4\sqrt{5}\left(x-\dfrac{16\sqrt{5}}{11}\right)-\dfrac{10}{11}$となる。

x軸との交点は$\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}、0\right)$より、$AC=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

(4)　ℓ_3とy軸との交点は$(-30、0)$より、$AD=30$