1 $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値が入る。

(1)　(*a*)　$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$、$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ とすると、

$A+B=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$、$A-B=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\log\boxed{\text{オ}}$ である。したがって、

$A=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi+\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\log\boxed{\text{コ}}$、

$B=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\log\boxed{\text{コ}}$ である。

(*b*)　$C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+3}{2\sin x+3\cos x+13}dx$、$D=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+2}{2\sin x+3\cos x+13}dx$ とすると、

$C=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi+\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}\log\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$、

$D=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\pi-\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}\log\dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

(2)　1個のサイコロを5回投げる。

(*a*)　同じ目が続けて出ない確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカキ}}}$ である。

(*b*)　同じ目が2回以上続けて出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケコ}}}{\boxed{\text{サシスセ}}}$ である。

(*c*)　同じ目が4回以上続けて出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツテト}}}$ である。

(*d*)　同じ目が3回以上続けて出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

(3)　実数 b、c を用いて一般項が $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b^{n-k}c^k$ と表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(*a*)　$b=3$、$c=-2$ のとき、a_5 を5で割った余りは $\boxed{\text{ア}}$ である。

(*b*)　$b=\dfrac{1}{2}$、$c=-\dfrac{1}{3}$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(*c*)　$b=\dfrac{1}{2}$、$c=-\dfrac{1}{3}$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

ただし、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx^n=0\ (|x|<1)$ を用いた。

解説

(1)　(*a*)　$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$、$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$　より

$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

$$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)'}{\cos x+\sin x}dx$$
$$=\Big[\log|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\log\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{2}\log 2\quad\cdots\cdots\cdots ②$$

①、②より

$$A=\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\log 2\text{、}B=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}\log 2$$

(*b*)　$C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+3}{2\sin x+3\cos x+13}dx$、$D=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+2}{2\sin x+3\cos x+13}dx$ より

$$3C+2D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x++2\sin x+13}{2\sin x+3\cos x+13}dx$$
$$=\int_0^{\frac{x}{2}}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots\cdots ③$$

$$2C-3D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x+13}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x+3\cos x+13)'}{2\sin x+3\cos x+13}dx$$
$$=\Big[\log|2\sin x+3\cos x+13|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\log 15-\log 16$$
$$=\log\frac{15}{16}\quad\cdots\cdots\cdots ④$$

③、④より

$$C=\frac{3}{26}\pi+\frac{2}{13}\log\frac{15}{16}\text{、}D=\frac{1}{13}\pi-\frac{3}{13}\log\frac{15}{16}$$

(2)　サイコロの目の出方は 6^5 通り。

(*a*)　同じ目が続けて出ないのは、前の目と違う目が続けて出ればよいので、
求める確率は

$$\frac{6\cdot 5^4}{6^5}=\frac{625}{1296}$$

(*b*)　同じ目が2回以上続けて出ない確率は

$$1-(\text{同じ目が続けて出ない確率})=1-\frac{625}{1296}$$
$$=\frac{671}{1296}$$

(*c*)　同じ目が4回以上出るのは以下の場合である。

(ⅰ)　すべて同じ目が出るとき

(ⅱ)　1回目と2回目が異なり、2回目以降同じ目が出るとき

(ⅲ)　1回目から4回目まで同じ目で、5回目は4回目と違う目が出るとき

(ⅰ)のとき、$\dfrac{1\times 6}{6^5}=\dfrac{1}{6^4}$

(ⅱ)のとき、$\dfrac{6\times 5}{6^5}=\dfrac{5}{6^4}$

(ⅲ)のとき、$\dfrac{5\times 6}{6^5}=\dfrac{5}{6^4}$

(ⅰ)〜(ⅲ)より、求める確率は

$$\frac{1+5+5}{6^4}=\frac{11}{1296}$$

(*d*)　同じ目が3回以上出るのは以下の場合である。

(ⅰ)　1回目から3回目まで同じ目でが出るとき（4、5回目は何でもよい）

(ⅱ)　1回目と2回目が異なり、2回目から4回目まで同じ目が出るとき（5回目は何でもよい）

(ⅲ)　3回目から5回目まで同じ目で、2回目と3回目と違う目が出るとき（1回目は何でもよい）

(ⅰ)のとき、$\dfrac{6\times 6^2}{6^5}=\dfrac{6}{6^3}$

(ⅱ)のとき、$\dfrac{6\times 5\times 6}{6^5}=\dfrac{5}{6^3}$

(ⅲ)のとき、$\dfrac{6\times 6\times 5}{6^5}=\dfrac{5}{6^3}$

(ⅰ)〜(ⅲ)より、求める確率は

$$\frac{6+5+5}{6^3}=\frac{16}{216}$$
$$=\frac{2}{27}$$

(3)　(*a*)　$b=3$、$c=-2$ のとき

$$a_5=\sum_{k=0}^{5}3^{5-k}\cdot(-2)^k$$
$$=3^5\sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$$
$$=3^5\cdot\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^6}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$
$$=3^5\times\frac{3}{5}\times\frac{3^6-2^6}{3^6}$$
$$=133$$

よって、5で割った余りは3

(b) $a_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\dfrac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=\dfrac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{2}{15}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$=-\frac{1}{2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{10}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2}{15}n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

ここで、$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}$ $(r\neq 1)$ とおくと

$$\begin{array}{rl} S_n= & 1+2r+3r^2+\cdots\cdots+nr^{n-1} \\ -)\ rS_n= & \quad\ \ r+2r^2+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n \\ \hline (1-r)S_n= & 1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}-nr^n \end{array}$$

$=\dfrac{1-r^n}{1-r}-nr^n$

よって、$S_n=\dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}-\dfrac{nr^n}{1-r}$

$-1<r<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{(1-r)^2}$

となるので

$\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\frac{3}{10}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{2}{15}\cdot\dfrac{1}{\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^2}$

$=\frac{6}{5}-\frac{3}{40}$

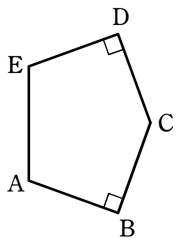
$=\frac{9}{8}$

2　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値が入る。

右（下）図の五角形ABCDEにおいて、

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DE}=\mathrm{EA}=1,\ \angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{D}=90^\circ$$

である。



(a)　$\cos\angle\mathrm{ACE}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

また、五角形 ABCDE の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{p}$、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{q}$ とすると $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$、$\vec{p}\cdot\vec{q}=-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。ここで

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=s\vec{p}+t\vec{q}$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$、$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=1$、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}>0$ より

$$s=\frac{\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}、t=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$ を得る。

辺 AE の中点を M とすると、$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\dfrac{\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}(\vec{p}+\vec{q})$ となり、

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=-\frac{\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\vec{p}-\frac{\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}\vec{q}$$ となる。

(c)　五角形 ABCDE と合同な五角形を用いて図 1 のように隙間も重なりもなく平面を敷き詰めることができる。この平面の敷き詰めの周期的構造を特徴づけるベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$ をとる。ただし、点 M′ は辺 A′E′ の中点、点 M″ は辺 A″E″ の中点である。

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}=-\frac{\boxed{\text{ニ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}\vec{p}-\frac{\boxed{\text{ノ}}+\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}\vec{q}$$ であり、

$$|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|^2=\boxed{\text{フ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}、\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM''}}=\boxed{\text{ホ}}$$ である。

また、△MM′M″ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{マ}}+\sqrt{\boxed{\text{ミ}}}}{\boxed{\text{ム}}}$ である。

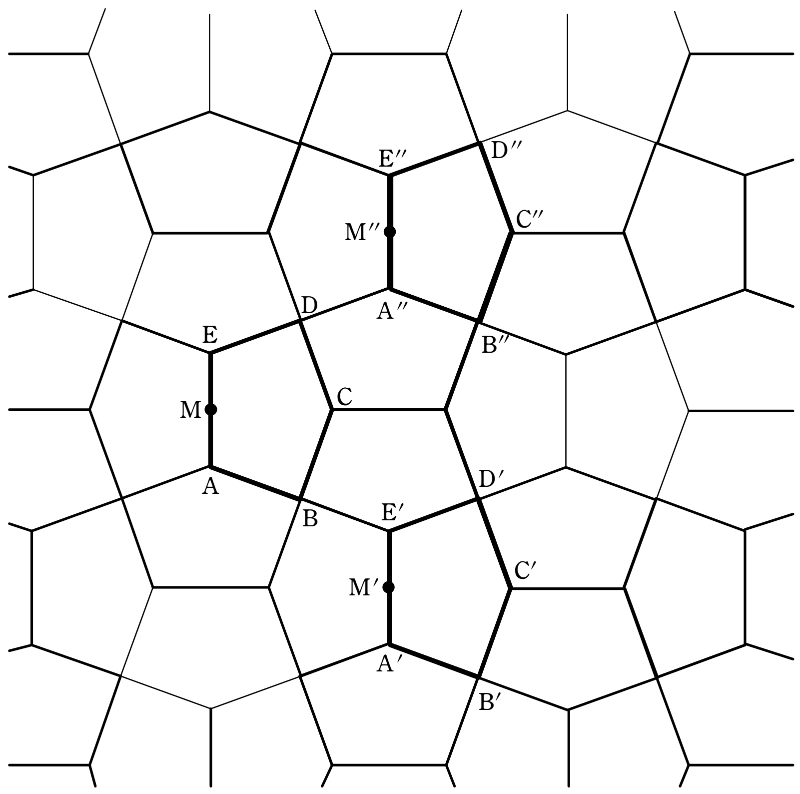


図 1

解説

(a)　△ABC と △CDE は直角二等辺三角形より、$\mathrm{AC}=\mathrm{CE}=\sqrt{2}$

よって、△ACE で余弦定理より

$$1^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\angle\mathrm{ACE}$$

$$\therefore\ \cos\angle\mathrm{ACE}=\frac{3}{4}$$

五角形 ABCDE の面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACE}+\triangle\mathrm{CDE}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\angle\mathrm{ACE}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{4+\sqrt{7}}{4}$$

(b)　$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\angle\mathrm{BCD}$
$$=1\cdot1\cdot\cos(\angle\mathrm{ACE}+45^\circ+45^\circ)$$
$$=1\cdot1\cdot\cos(\angle\mathrm{ACE}+90^\circ)$$
$$=1\cdot1\cdot(-\sin\angle\mathrm{ACE})$$
$$=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})=0$$
$$\therefore\ \vec{p}\cdot(s\vec{p}+t\vec{q}-\vec{p})=0$$
$$\therefore\ (s-1)|\vec{p}|^2+t\vec{p}\cdot\vec{q}=0$$
$$\therefore\ s-1-\frac{\sqrt{7}}{4}t=0$$
$$\therefore\ s=1+\frac{\sqrt{7}}{4}t\quad\cdots\cdots①$$

また、$\mathrm{CA}=\sqrt{2}$ より

$$|s\vec{p}+t\vec{q}|^2=2$$
$$\therefore\ s^2|\vec{p}|^2+2st\vec{p}\cdot\vec{q}+t^2|\vec{q}|^2=2$$
$$\therefore\ s^2-\frac{\sqrt{7}}{2}st+t^2=2$$

① を代入して

$$\left(1+\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)^2-\frac{\sqrt{7}}{2}t\left(1+\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)+t^2=2$$
$$\therefore\ 9t^2=16$$
$$\therefore\ t=\pm\frac{4}{3}$$

よって、$(s,\ t)=\left(\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{3},\ \pm\dfrac{4}{3}\right)$（複号同順）

ここで、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}>0$ より

$$\vec{q}\cdot(s\vec{p}+t\vec{q}-\vec{p})>0$$
$$\therefore\ (s-1)\vec{p}\cdot\vec{q}+t|\vec{q}|^2>0$$
$$\therefore\ -\frac{\sqrt{7}}{4}(s-1)+t>0$$
$$\therefore\ t>\frac{\sqrt{7}}{4}(s-1)$$

これを満たす $(s,\ t)$ は、$(s,\ t)=\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ である。

辺 AE の中点を M より

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\mathrm{CM}\times\frac{\vec{p}+\vec{q}}{|\vec{p}+\vec{q}|}$$

となる。

$$\mathrm{CM}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$
$$|\vec{p}+\vec{q}|^2=|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$
$$=\frac{4-\sqrt{7}}{2}$$
$$=\frac{8-2\sqrt{7}}{4}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2$$
$$\therefore\ |\vec{p}+\vec{q}|=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times\dfrac{\vec{p}+\vec{q}}{\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}}$

$$=\frac{7+\sqrt{7}}{6}(\vec{p}+\vec{q})$$

これより、$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

$$=\vec{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{6}(\vec{p}+\vec{q})$$
$$=-\frac{1+\sqrt{7}}{6}\vec{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{6}\vec{q}$$

(c)　$\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\overrightarrow{\mathrm{M'A}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BE'}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE'}}+\overrightarrow{\mathrm{E'B}}$$
$$=2(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{MB}}$$
$$=-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\vec{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{3}\vec{q}$$
$$=-\frac{1+\sqrt{7}}{3}(\vec{p}+\sqrt{7}\vec{q})$$

よって、$|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|^2=\left(-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2|\vec{p}+\sqrt{7}\vec{q}|^2$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2\left(\left|\vec{p}\right|^2+2\sqrt{7}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+7\left|\vec{q}\right|^2\right)$$
$$=\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\cdot\frac{9}{2}$$
$$=4+\sqrt{7}$$

$\triangle$BCD において余弦定理より

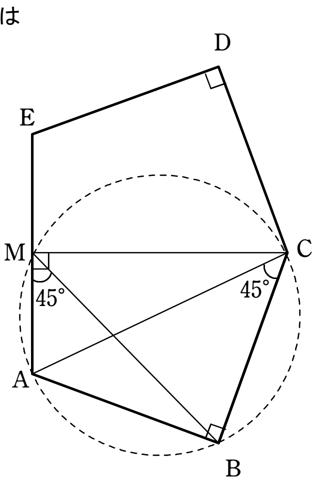
$$\mathrm{BD}^2=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\angle\mathrm{BCD}$$
$$=2-2\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$
$$=\frac{4+\sqrt{7}}{2}$$

$\triangle$BDM$'$ において余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BM}^2+\mathrm{DM}^2-2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{MD}\cdot\cos\angle\mathrm{BMD}$$
$$\therefore\quad \frac{4+\sqrt{7}}{2}=\left(\frac{\mathrm{MM}'}{2}\right)^2\times2-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}$$
$$\therefore\quad 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right|^2}{2}-\frac{4+\sqrt{7}}{2}$$
$$\therefore\quad 2\times\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{MM}'}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{MM}''}}{2}\right)=\frac{4+\sqrt{7}}{2}-\frac{4+\sqrt{7}}{2}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{MM}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM}''}=0$$

よって、$\mathrm{MM}'=\mathrm{MM}''$ より、$\triangle\mathrm{MM}'\mathrm{M}''$ の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right|^2=\frac{4+\sqrt{7}}{2}$$



別解　$\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM}''}$ について

$\angle\mathrm{CMA}=\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ より、

四角形ABCM は円に内接する。

よって、円周角の定理より、

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{AMB}=45^\circ$

これより、$\angle\mathrm{CMB}=45^\circ$ となるので、

$\angle\mathrm{M}''\mathrm{MM}'=90^\circ$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM}''}=0$

3 $f(0)=1$、$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ を満たす増加関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする。このとき、正の整数 n に対して $a_n=f^{-1}(n)$ とし、

$$S_n=\begin{cases} 0 & (n=1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1}-a_k) & (n\geqq 2) \end{cases}$$

とする。

(1)　$f(x)=\sqrt{x+1}$ のとき、a_2、a_3 を求めよ。

(2)　$f(x)=\sqrt{x+1}$ のとき、S_n を n を用いて表せ。

(3)　$f(x)=e^x$ のとき、$S_n=n\log n-\log(n!)$ を示せ。

(4)　正の整数 n に対して $n!\geqq n^n e^{1-n}$ を示せ。

解説

(1)　$y=\sqrt{x+1}$ とする。$(x\geqq -1,\ y\geqq 0)$

x と y を入れ替えると

$$x=\sqrt{y+1}\quad (y\geqq -1,\ x\geqq 0)$$

$$\therefore\quad x^2=y+1$$

$$\therefore\quad y=x^2-1$$

よって、$f^{-1}(x)=x^2-1$ となるので、$a_n=n^2-1$

これより、$a_2=3$、$a_3=8$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$n(a_{n+1}-a_n)=n\{(n+1)^2-1-(n^2-1)\}$$
$$=2n^2+n$$

よって、$n\geqq 2$ のとき

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k)$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=\frac{n(n-1)(4n-1)}{6}$$

$n=1$ のとき $S_1=0$ より、含まれるので

すべての自然数 n に対して、$S_n=\dfrac{n(n-1)(4n-1)}{6}$

(3)　$y=e^x$ とする。$(y>0)$

x と y を入れ替えると

$$x=e^y\quad (x>0)$$

$$\therefore\quad y=\log x$$

よって、$f^{-1}(x)=\log x$ となるので、$a_n=\log n$

$n\geqq 2$ のとき

$$n(a_{n+1}-a_n)=n\{\log(n+1)-\log n\}$$
$$=(n+1)\log(n+1)-n\log n-\log(n+1)$$

よって、$n\geqq 2$ のとき

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\{(n+1)\log(n+1)-n\log n\}-\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)$$
$$=(2\log 2-1\log 1)+(3\log 3-2\log 2)+\cdots\cdots+\{n\log n-(n-1)\log(n-1)\}$$
$$-(\log 2)+\log 3+\cdots\cdots+\log n$$
$$=n\log n-\log 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot n$$
$$=n\log n-\log(n!)$$

$n=1$ のとき $S_1=0$ より、含まれるので

すべての自然数 n に対して、$S_n=n\log n-\log(n!)$

(4)　(ⅰ)　$n=1$ のとき成立。

(ⅱ)　$n\geqq 2$ のとき

$n!>n^n e^{1-n}$ において、両辺対数をとって

$$\log(n!)>\log n^2 e^{1-n}$$

$$\therefore\quad \log(n!)>n\log n+1-n$$

$$\therefore\quad n\log n-\log(n!)<n-1$$

$$\therefore\quad S_n<n-1$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n-1}k\{\log(k+1)-\log k\}<n-1\ \cdots\cdots\cdots ①$$

よって、$n\geqq 2$ で ① が成立することを示せばよい。

$g(x)=\log x\ (x>0)$ とおくと、$x>0$ で $g(x)$ は微分可能より

平均値の定理より

$$\frac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-x}=g'(c)\quad (x<c<x+1)$$

を満たす c が少なくとも1つ存在する。

$\dfrac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-x}=g'(c)$ より

$$\log(x+1)-\log x=\frac{1}{c}$$

$x<c$ より、$\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$

よって、$\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x}$ が成り立つ。

これより、(① の左辺)$=\sum_{k=1}^{n-1}k\{\log(k+1)-\log k\}$

$$<\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\frac{1}{k}$$
$$=n-1$$

よって、$n\geqq 2$ で ① が成り立つので、(ⅰ)、(ⅱ) より、すべての自然数 n に対して与式は成立する。

別解　① の続き

$g(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}\ (x>1)$ とおくと

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\log(x+1)-\log x+\frac{x}{x+1}-1$$
$$=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

よって、$x>1$ で $g''(x)<0$ より、$x>1$ で $g'(x)$ は単調減少である。

また、$\lim_{x\to\infty} g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=0$$

よって、$x>1$ で $g'(x)>0$ より、$x>1$ で $g(x)$ は単調増加である。

また、$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} x\{\log(x+1)-\log x\}$

$$=\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
$$=1$$

これより、$x>1$ で $g(x)<1$ となるので、$n\geqq 2$ で $k\{\log(k+1)-\log k\}<1$ となる。

よって、$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\{\log(k+1)-\log k\}<\sum_{k=1}^{n-1}1=n-1$$

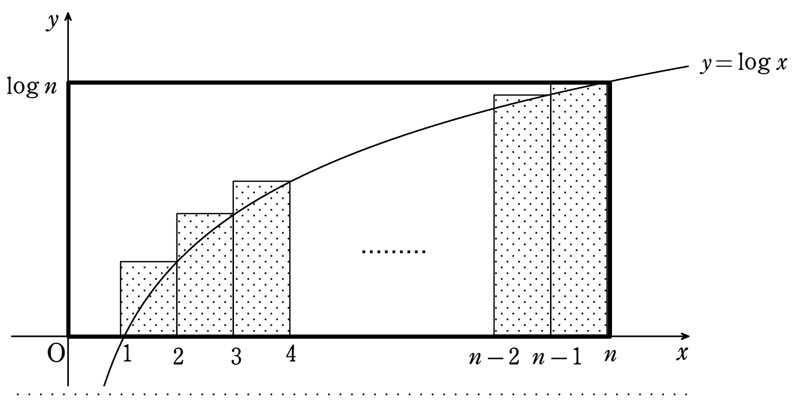
が成り立つ。（以下略）

別解　① の続き ($S_n<n-1$ を示す)

(3) より、$S_n=n\log n-\log(n!)$

$$=n\log n-\sum_{k=1}^{n}\log k$$

ここで、$n\log n$ は下図の太線の長方形の面積、$\sum_{k=1}^{n}\log k$ は下図の打点部分の底辺が 1、高さが $\log k\ (k=1、2、\cdots\cdots、n)$ の長方形の面積の総和を表す。



よって、図より

$$S_n<\int_0^{\log n} e^y\,dy$$
$$=\Big[e^y\Big]_0^{\log n}$$
$$=e^{\log n}-e^0$$
$$=n-1$$

以下略