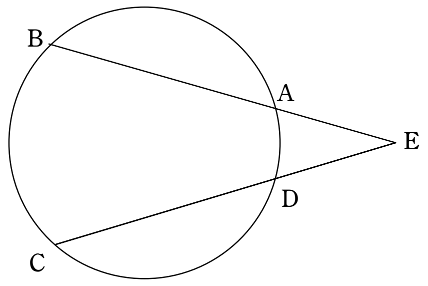
1　次の (1) から (5) までの各問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1)　2 点 A $(\vec{a})$、B $(\vec{b})$ が条件 $2|\vec{a}|=3|\vec{b}|\neq 0$ を満たし、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° である。このとき、直線 AB 上にあり、原点から最も近い点 P $(\vec{p})$ について、$\vec{p}$ を、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　誕生月を考える。任意に 5 人を選んだところ、少なくとも 2 人以上が同じ誕生月である確率を求めよ。ただし、1 月から 12 月まで、どの月に生まれるかは同様に確からしいとする。

(3)　図において、4 点 A、B、C、D は同一円周上にあり、直線 BA と直線 CD の交点を E とする。∠AED = 36° で、弧 AB、弧BC および弧 CD はすべて長さが等しいとき、∠ACD の大きさを求めよ。



(4)　複素数平面上の点 z に対して、$w=(1+2i)(z+2)$ で表される点 w がある。点 z が単位円周上を動くとき、$|w+1|$ の最大値を求めよ。

(5)　$0\leqq x<2\pi$ のとき、関数 $f(x)=2\sin 2x\sin x+3\sin^2 x+4\cos^2\dfrac{x}{2}$ の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

解説

(1)　$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=2$ としても一般性は失われない。

このとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ=3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=3$

P は直線AB 上より

$$\vec{p}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad(t\text{ は実数})$$

と表される ……… ①

OP が最小となるのは、OP⊥AB となるとき、

つまり $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となるときであるので

$$\vec{p}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$\therefore\ \{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$\therefore\ t\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{a}|^2+(1-t)|\vec{b}|^2-(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\therefore\ 3t-9t+4(1-t)-3(1-t)=0$$

$$\therefore\ -7t+1=0$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{7}$$

よって、$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+6\vec{b}}{7}$

別解　① の続き

OP が最小より

$$|\vec{p}|^2=|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|^2$$
$$=t^2|\vec{a}|^2+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)^2|\vec{b}|^2$$
$$=9t^2+(2t-2t^2)\cdot 3+(1-2t+t^2)\cdot 4$$
$$=7t^2-2t+4$$
$$=7\left(t-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{27}{7}$$

よって、$t=\dfrac{1}{7}$ のとき、OP は最小となるので、$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+6\vec{b}}{7}$

(2)　5 人が全員異なる誕生月となる確率は

$$1\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}\times\frac{8}{12}=\frac{55}{144}$$

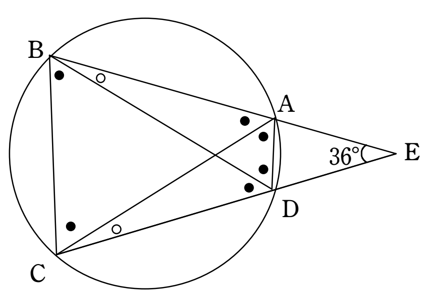
よって、求める確率は

$$1-\frac{55}{144}=\frac{89}{144}$$

(3)　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ 、円周角の定理より

∠ADB = ∠ACB = ∠CAD = ∠CBD = ∠BAC = ∠BDC = x

$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角の定理より、∠ABD = ∠ACD = y とおくと



● : x
○ : y　とする。

△BCE において

$$36^\circ+2x+2y=180^\circ$$

$$\therefore\ x+y=72^\circ\ \cdots\cdots\cdots ①$$

四角形ABCD において

$$6x+2y=360^\circ$$

$$\therefore\ 3x+y=180^\circ\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①、② より

$$x=54^\circ,\ y=18^\circ$$

よって、∠ACD = 18°

(4)　$w=(1+2i)(z+2)$ より

$$w=(1+2i)z+2(1+2i)$$

$$\therefore\ (1+2i)z=w-2(1+2i)$$

$$\therefore\ z=\frac{w-2(1+2i)}{1+2i}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

z は単位円周上の点より、$|z|=1$

① を代入して

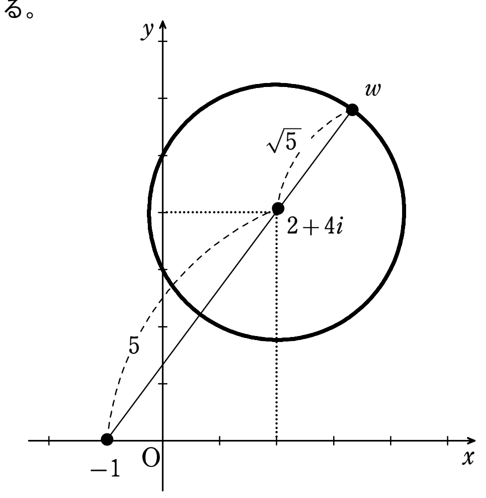
$$\left|\frac{1}{1+2i}\{w-2(1+2i)\}\right|=1$$

$$\therefore\ \left|\frac{1}{1+2i}\right|\cdot|w-2(1+2i)|=1$$

$$\therefore\ |w-2(1+2i)|=\sqrt{5}$$

よって、点 w は点 $2+4i$ を中心とした半径 $\sqrt{5}$ の円周上を動く。

ここで、$|w+1|$ は点 w と点-1 の距離より、$|w+1|$が最大となるのは図のときである。



よって、$|w+1|$ の最大値は、$5+\sqrt{5}$

(5)　$f(x)=2\sin 2x\sin x+3\sin^2 x+4\cos^2\dfrac{x}{2}$

$$=2\sin x\cdot 2\sin x\cos x+3\sin^2 x+4\cdot\frac{1+\cos x}{2}$$
$$=4\sin^2 x\cos x+3\sin^2 x+2\cos x+2$$
$$=4(1-\cos^2 x)\cos x+3(1-\cos^2 x)+2\cos x+2$$
$$=-4\cos^3 x-3\cos^2 x+6\cos x+5$$

$\cos x=t$ とおくと $(-1\leqq t\leqq 1)$

$f(x)=-4t^3-3t^2+6t+5$

$=g(t)$ とおく

$g'(t)=-12t^2-6t+6$

$=-6(2t-1)(t+1)$ より

増減表は以下のようになる。

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	$\frac{27}{4}$	↘	4

よって、$t=\dfrac{1}{2}$ のとき、つまり、$x=\dfrac{\pi}{3}$、$\dfrac{5}{3}\pi$ のとき、最小値$\dfrac{27}{4}$

$t=-1$ のとき、つまり、$x=\pi$ のとき、最小値 0

2　座標平面上で、x 座標と y 座標がいずれも整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という。
n を正の整数として、以下の問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1)　$0 \leqq x \leqq 4$、$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$0 \leqq x \leqq n^2$、$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

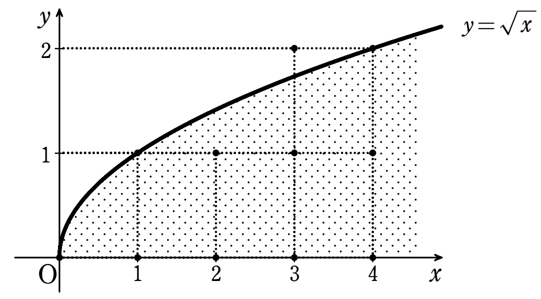
(3)　座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$、A$(n,\ 3n)$、B$(10n,\ 0)$ がある。このとき

　(a)　△OAB の周及び内部にある格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

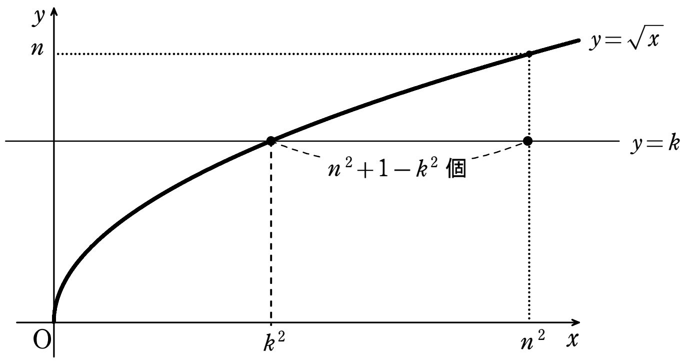
　(b)　△OAB の内心の座標 I と外心 $\mathrm{O_1}$ をそれぞれ求めよ。

解説

(1)　求める格子点の個数は、図より 10 個



(2)　$y=k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ 上の格子点の個数は



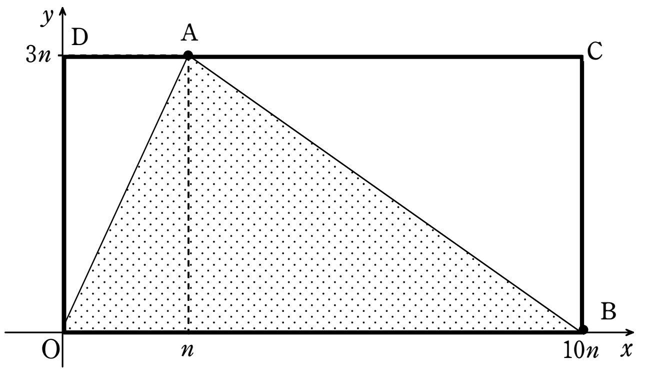
図より、n^2-k^2+1 個である。

よって、求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2+1-k^2)=(n+1)(n^2+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{6}(n+1)\{6(n^2+1)-n(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)$$

(3)　図のように点 C、D を設定する。

(a)



求める格子点の個数は

　長方形ABCD に含まれる格子点の個数

　　　　$-$△OAD に含まれる格子点の個数（線分OA上は含まない）

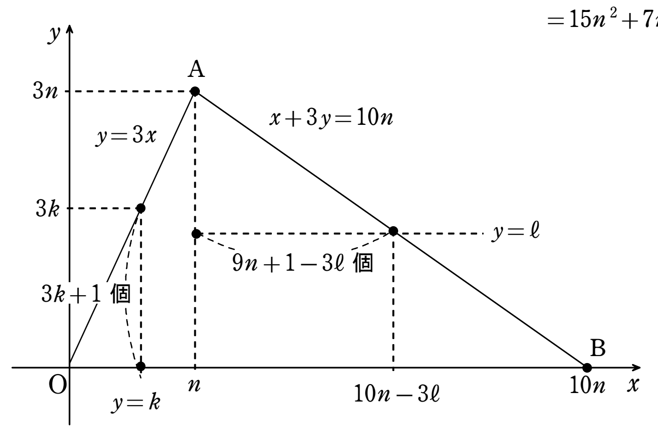
　　　　$-$△ABC に含まれる格子点の個数（線分AB上は含まない）

である。

また、、線分 OA 上の格子点の個数は、$n+1$ 個、線分 AB 上の格子点の個数は、$3n+1$ 個より

$$(10n+1)(3n+1)-\frac{(n+1)(3n+1)-(n+1)}{2}-\frac{(9n+1)(3n+1)-(3n+1)}{2}$$
$$=15n^2+7n+1 \text{ 個}$$

別解



$x=k$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ 上の格子点の個数は、

$$\sum_{k=0}^{n-1}(3k+1)=\frac{n}{2}\{1+3(n-1)+1\}$$
$$=\frac{1}{2}(3n^2-n) \quad \text{個}$$

$x=\ell$ $(0 \leqq \ell \leqq 3n)$ 上の格子点の個数は、$\displaystyle\sum_{\ell=n}^{10n}(9n+1-3\ell)$ 個

$$\sum_{\ell=0}^{3n}(9n+1-3\ell)=(9n+1)(3n+1)-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3n(3n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(27n^2+15n+2) \quad \text{個}$$

よって、求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}(3n^2-n)+\frac{1}{2}(27n^2+15n+2)=15n^2+7n+1 \text{ 個}$$

(b)　・内心の座標

内心を $(p,\ q)$ とすると、内心 I は各直線から等距離の点より

$$\frac{|q-3p|}{\sqrt{10}}=\frac{|p+3q-10n|}{\sqrt{10}}=q$$

内心 $(p,\ q)$ は $y-3x=0$、$x+3y-10n=0$ の下側 より

$$q-3p<0,\ p+3q-10n<0$$

よって、$\dfrac{-q+3p}{\sqrt{10}}=\dfrac{-p-3q+10n}{\sqrt{10}}=q$

$$\therefore \begin{cases} -q+3p=\sqrt{10}\,q \\ -p-3q+10n=\sqrt{10}\,q \\ -q+3p=-p-3q+10n \end{cases}$$

$$\therefore\ p=(5-\sqrt{10})n、q=(2\sqrt{10}-5)n$$

よって、I$((5-\sqrt{10})n、(2\sqrt{10}-5)n)$

別解　内心を $(p,\ q)$ とすると、内心 I は角の二等分線の交点より

∠AOB の二等分線は

$$y=\frac{|y-3x|}{\sqrt{10}}$$

$y-3x<0$ の部分より

$$y=\frac{-y+3x}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ y=\frac{3x}{1+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}-1}{3}x \ \cdots\cdots ①$$

∠ABO の二等分線は

$$y=\frac{|x+3y-10n|}{\sqrt{10}}$$

$x+3y-10n<0$ の部分より

$$y=\frac{-x-3y+10n}{\sqrt{10}}$$

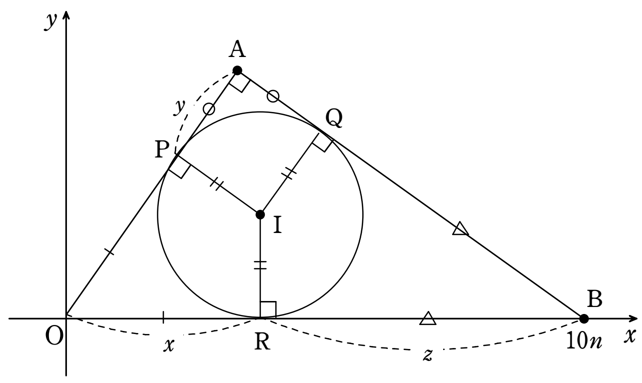
$$\therefore\ y=\frac{-x+10n}{3+\sqrt{10}}=-(\sqrt{10}-3)x+10(\sqrt{10}-3)n \ \cdots\cdots ②$$

①、② を連立して

$$\therefore\ x=(5-\sqrt{10})n、y=(2\sqrt{10}-5)n$$

よって、I$((5-\sqrt{10})n、(2\sqrt{10}-5)n)$

別解



内接円の半径を r、図のように、接点をP、Q、R とする。

$$\mathrm{OA}=\sqrt{n^2+(3n)^2}=\sqrt{10}\,n$$
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(10n-n)^2+(3n)^2}=3\sqrt{10}\,n$$

△OAB の面積より

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AB}=\frac{r}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{AB}+\mathrm{OB})$$
$$\therefore\ \sqrt{10}\,n\cdot 3\sqrt{10}\,n=r\cdot(\sqrt{10}\,n+10n+3\sqrt{10}\,n)$$
$$\therefore\ r=(2\sqrt{10}-5)n$$

また、OP$=$OR$=x$、AP$=$AQ$=y$、BQ$=$BR$=z$ とおくと

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{10}\,n \\ y+z=3\sqrt{10}\,n \\ z+x=10n \end{cases}$$

$$\therefore\ x=(5-\sqrt{10})n、y=(2\sqrt{10}-5)、z=(5+\sqrt{10})n$$

よって、I$((5-\sqrt{10})n、(2\sqrt{10}-5)n)$

別解　直線 AI と直線 OB の交点を S とする。

∠O の二等分線の性質より、AS : BS$=$OA : OB$=\sqrt{10}\,n : 10n=1 : \sqrt{10}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{\sqrt{10}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+\sqrt{10}}$

$\angle$A の二等分線の性質より、OI : IS＝OA : AS＝$\sqrt{10}\,n : \dfrac{3\sqrt{10}\,n}{1+\sqrt{10}} = 1+\sqrt{10} : 3$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{1+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}\overrightarrow{\mathrm{OS}}$

$$= \frac{\sqrt{10}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4+\sqrt{10}}$$

$$= \frac{4-\sqrt{10}}{6}\left\{\sqrt{10}\begin{pmatrix} n \\ 3n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10n \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} (5-\sqrt{10}\,n) \\ (2\sqrt{10}-5)n \end{pmatrix}$$

よって、I$((5-\sqrt{10})n$、$(2\sqrt{10}-5)n)$

・外心の座標

$\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{2}$ より、OB が直径となるので、$\mathrm{O}_1(5n$、$0)$

3　$t>1$ とする。関数 $f(x)=x\log t-t\log x$ について、以下の問いに答えよ。
なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べよ。

(2)　関数 $f(x)$ の最小値が 0 以下であることを示せ。

(3)　$e^{\sqrt{5}}$ と $\sqrt{5}^{\,e}$ の大小関係を調べよ。

(4)　関数 $F(t)=\int_1^t f(x)dx$ について、$F'(e)$ を求めよ。

解説

(1)　真数条件より、$x>1$

$f(x)=x\log t-t\log x$

$$f'(x)=\log t-\frac{t}{x}$$

よって、増減表は以下のようになる。

x	0		$\dfrac{t}{\log t}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$t-t\log\dfrac{t}{\log t}$	↗

これより、$0<x<\dfrac{t}{\log t}$ で単調減少、$\dfrac{t}{\log t}<x$ で単調増加

(2)　$f(x)$ の最小値は、$t-t\log\dfrac{t}{\log t}=t\left(1-\log\dfrac{t}{\log t}\right)$

$t>1$ より　$1-\log\dfrac{t}{\log t}$ が 0 以下となればよい。

よって、$g(t)=1-\log\dfrac{t}{\log t}=1-\log t+\log(\log t)$ とおくと

$$g'(t)=-\frac{1}{t}+\frac{\frac{1}{t}}{\log t}$$

$$=\frac{1}{t}\cdot\frac{1-\log t}{\log t}$$　より

増減表は以下のようになる。

t	1		e	
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	0	↘

よって、$g(t)\leqq 0$ より、$f(x)$ の最小値は 0 以下である。

別解　$f(x)$ の最小値は、$t-t\log\dfrac{t}{\log t}=t\left(1-\log\dfrac{t}{\log t}\right)$

$t>1$ より　$1-\log\dfrac{t}{\log t}$ が 0 以下となればよい。

つまり、$1-\log\dfrac{t}{\log t}=1+\log\dfrac{\log t}{t}$

$$=\log\frac{\log t}{t}-(-1)$$

$$=\log\frac{\log t}{t}-\log\frac{1}{e}$$ より

$t>1$ で $\dfrac{\log t}{t}\leqq\dfrac{1}{e}$ であればよい。

よって、$h(t)=\dfrac{\log t}{t}$ とおくと、$t>1$ で $y=h(t)$ の最大値が $\dfrac{1}{e}$ 以下であればよい。

これより、$h'(t)=\dfrac{1-\log t}{t^2}$ より

増減表は以下のようになる。

t	1		e	
$h'(t)$		$+$	0	$-$
$h(t)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

よって、$h(t)\leqq\dfrac{1}{e}$ より、$f(x)$ の最小値は 0 以下である。

別解　$f(x)=0$ となるのは

$$x\log t-t\log x=0$$

$$\therefore\ \frac{\log x}{x}=\frac{\log t}{t}$$

よって、$f(x)=0$ は$x=t$ を解にもつ。
つまり、$y=f(x)$ は$x=t$ で x 軸と交わる。
これより、(1) の増減表を考えると、$f(x)$ の最小値は 0 以下となる。

(3)　(2) より、$y=h(t)$ の最大値は $h(e)$ より

$$h(e)>h(\sqrt{5})$$

$$\therefore\ \frac{\log e}{e}>\frac{\log\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ \sqrt{5}\log e>e\log\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \log e^{\sqrt{5}}>\log\sqrt{5}^{\,e}$$

底>1 より、$e^{\sqrt{5}}>\sqrt{5}^{\,e}$

(4)　$F(t)=\int_1^t(x\log t-t\log x)dx$

$$=\log t\int_1^t xdx-t\int_1^t\log xdx$$

よって、$F'(t)=\dfrac{1}{t}\cdot\int_1^t xdx+t\log t-\int_1^t\log xdt-t\log t$

$$=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^t-\Big[x\log x-x\Big]_1^t$$

$$=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2t}-t\log t-1$$

よって、$F'(e)=\dfrac{1}{2}e-\dfrac{1}{2e}-1$

別解　$F(t)=\int_1^t(x\log t-t\log x)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log t-t(x\log x-x)\right]_1^t$$

$$=-\frac{1}{2}t^2\log t-\frac{1}{2}\log t+t^2-t$$

$F'(t)=-t\log t+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{2t}-1$

よって、$F'(e)=\dfrac{1}{2}e-\dfrac{1}{2e}-1$