1 次の $\boxed{}$ をうめよ。答えは解答用紙の該当欄に記入せよ。

(ⅰ) $\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ とする。$t=\sin\theta\cos\theta$ として、$\sin\theta+\cos\theta$ を t の式で表すと $\boxed{(1)}$ である。また関数 $f(\theta)=\sin^2\theta\cos\theta+\cos^2\theta\sin\theta$ の最大値は $\boxed{(2)}$ である。

(ⅱ) $\triangle$ABC において AB $=3$、CA $=4$、$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{4}$ とし、辺 BC を $3:1$ に内分する点を D とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の大きさは $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\boxed{(3)}$ である。また、辺 BC の中点を M とし、直線 AM 上に点 P をとり、線分 BP の中点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{DN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が直交するとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{(4)}$ である。

(ⅲ) n を 3 以上の自然数とする。箱の中に 1 から n までの番号を 1 つずつ書いた n 枚の札が入っている。この箱の中から同時に 3 枚の札を取り出すとき、取り出した 3 枚の札の番号のうち最小の番号が 3 である確率を P_n とする。このとき P_6 の値は $\boxed{(5)}$ である。また、n の値が変化するとき、P_n の最大値は $\boxed{(6)}$ である。

解説

(ⅰ) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2t$

ここで、$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より、$\pi\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{2}\pi$

よって、$-\sqrt{2}\leqq\sin\theta+\cos\theta\leqq 0$

したがって、$\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{1+2t}$

これより、$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=-t\sqrt{1+2t}$

$=g(t)$ とおくと

ここで、$t=\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ より

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より、$\dfrac{3}{2}\pi\leqq 2\theta\leqq\dfrac{5}{2}\pi$

よって、$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ ………①

これより、$g'(t)=-\sqrt{1+2t}-\dfrac{t}{\sqrt{1+2t}}$

$=-\dfrac{1+3t}{\sqrt{1+2t}}$

これより、増減表は以下のようになる。

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって、最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

別解 ① の続き

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、$g(t)\leqq 0$、$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 0$ のとき、$g(t)\geqq 0$ となるので

$g(t)$ が最大となるのは、$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 0$ のときである。

よって、$g(t)=-t\sqrt{1+2t}\quad\left(-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 0\right)$

$=\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{1+2t}$

$=\sqrt{t^2(1+2t)}$

$t^2(1+2t)=h(t)$ とおくと

$h(t)=2t^3+t^2$ より

$h'(t)=6t^2+2t$

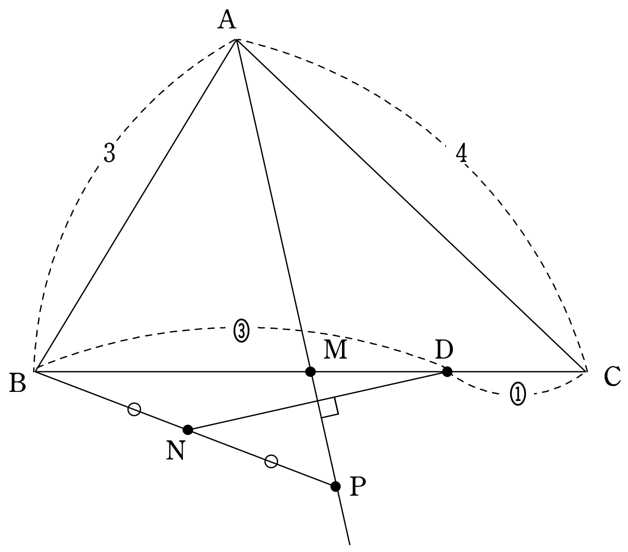
$=2t(3t+1)$

これより、増減表は以下のようになる。

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	↗	$\frac{1}{27}$	↘	0

よって、最大値は $h(t)$ の最大値は $\dfrac{1}{27}$ より、$f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

(ⅱ)



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると

$|\vec{b}|=3$、$|\vec{c}|=4$、$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC}=3\cdot 4\cdot\dfrac{1}{4}=3$

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=\dfrac{1}{16}|\vec{b}+3\vec{c}|^2$

$=\dfrac{1}{16}(|\vec{b}|^2+6\vec{b}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2)$

$=\dfrac{1}{16}(9+6\cdot 3+9\cdot 16)$

$=\dfrac{171}{16}$

よって、$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{3\sqrt{19}}{4}$

また、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくと (k は実数)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k}{2}\vec{b}+\dfrac{k}{2}\vec{c}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k}{2}\vec{b}+\dfrac{k}{2}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{k+2}{4}\vec{b}+\dfrac{k}{4}\vec{c}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=\dfrac{k+2}{4}\vec{b}+\dfrac{k}{4}\vec{c}-\dfrac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}$

$=\dfrac{k+1}{4}\vec{b}+\dfrac{k-3}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{DN}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{DN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$

よって、$\left(\dfrac{k+1}{4}\vec{b}+\dfrac{k-3}{4}\vec{c}\right)\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=0$

$\therefore\ \{(k+1)\vec{b}+(k-3)\vec{c}\}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$

$\therefore\ (k+1)|\vec{b}|^2+(2k-2)\vec{b}\cdot\vec{c}+(k-3)|\vec{c}|^2=0$

$\therefore\ 9(k+1)+3(2k-2)+16(k-3)=0$

$\therefore\ k=\dfrac{45}{31}$

これより、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{45}{62}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

(ⅲ) 取り出し方の総数は、${}_nC_3$ 通り。

$n\geqq 5$ のとき、取り出した 3 枚の札の番号の最小値が 3 となるのは、3 を 1 枚と 4 以上から 2 枚取り出すときより

$$P_n=\frac{1\cdot{}_{n-3}C_2}{{}_nC_3}$$

$$=\frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$

$$=\frac{3(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$$

となる。($n=3$、4 のとき、$P_3=0$、$P_4=0$ となるので成立)

これより、$P_6=\frac{3\cdot3\cdot2}{6\cdot5\cdot4}=\frac{3}{20}$

また、$P_{n+1}=\frac{3(n-2)(n-3)}{(n+1)n(n-1)}$ より

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{\frac{3(n-2)(n-3)}{(n+1)n(n-1)}}{\frac{3(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}}$$

$$=\frac{(n-2)^2}{(n+1)(n-4)}$$

①：$\frac{P_{n+1}}{P_n}>1$ のとき

$$\frac{(n-2)^2}{(n+1)(n-4)}>1$$

$\therefore\ \ n^2-4n+4>n^2-3n-4$

$\therefore\ \ n<8$

よって、$5\leqq n\leqq7$ のとき

$$P_5<P_6<P_7<P_8$$

となる。

②：$\frac{P_{n+1}}{P_n}=1$ のとき

つまり、$n=8$ のとき

$$P_8=P_9$$

となる。

③：$\frac{P_{n+1}}{P_n}<1$ のとき

つまり、$n\geqq9$ のとき

$$P_9>P_{10}>P_{11}>\cdots\cdots$$

となる。①～③より

$$P_5<P_6<P_7<P_8=P_9>P_{10}>P_{11}>\cdots\cdots$$

となるので、$n=8$、9 のとき、最大値 $\frac{5}{28}$ となる。

2 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(ⅰ) k を定数とし、点Pの座標 $(x,\ y)$ が正の数 t の関数として、

$$x=t+\frac{1}{t}、\ y=t^3+\frac{1}{t^3}+(k^2-k-7)\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

で表される。y を x と k を用いて表すと $y=\boxed{(1)}$ である。また点Pが x 軸上の点となるような正の数 t が存在しない k の値の範囲は $\boxed{(2)}$ である。

(ⅱ) 10個の値 9、10、1、2、2、8、10、a、$a+3$、b をもつデータがあり、その平均値は6である。このとき、b を a の式で表すと $b=\boxed{(3)}$ である。

さらに a、b が $a\leqq b$ を満たす整数であるとき、このデータの中央値が7となるような組 $(a,\ b)$ は全部で $\boxed{(4)}$ 個ある。

解説

(ⅰ) $t^3+\dfrac{1}{t^3}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^3-3t\cdot\dfrac{1}{t}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$

$=x^3-3x$ 　より

$y=x^3-3x+(k^2-k-7)x$

$=x^3+(k^2-k-10)x$

$=f(x)$ とおく

また、$t>0$、$\dfrac{1}{t}>0$ より、相加相乗平均の大小関係から

$$x=t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$$

等号は、$t=\dfrac{1}{t}$ のとき

つまり、$t^2=1$

$t>0$ より、$t=1$ のとき、等号成立。

よって、$x\geqq 2$ となる。

これより、点Pが x 軸上の点となるような正の数 t が存在しない条件は

$f(x)=0$ が $x\geqq 2$ で実数解をもたないことである。

つまり、$f(x)$ が奇関数であることを考慮すると、グラフより $f(2)>0$ となればよい。

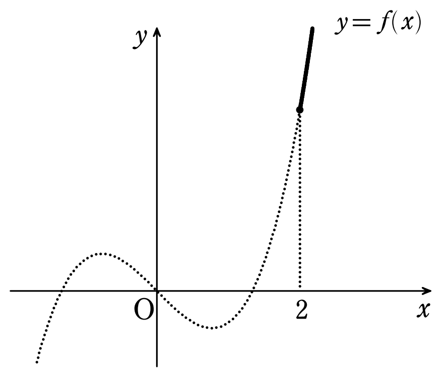
よって、$f(2)=2(k^2-k-6)>0$

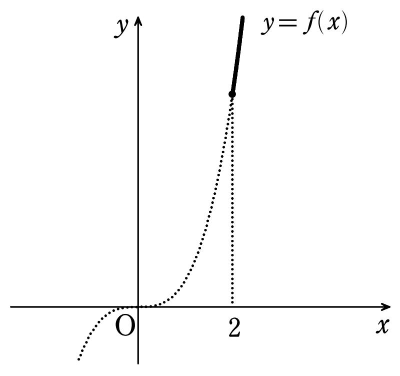
$\therefore\quad k^2-k-6>0$

$\therefore\quad (k-3)(k+2)>0$

$\therefore\quad k<-2、3<k$

参考　奇関数 $y=f(x)$ と $x=2$ の位置関係





(ⅱ) 10個のデータの平均値が6より

$$\frac{9+10+1+2+2+8+10+a+(a+3)+b}{10}=6$$

$\therefore\quad b=-2a+15$

また、a、$a+3$、b を除いた 9、10、1、2、2、8、10 を小さい順に並べると

1、2、2、8、9、10、10

となる。

よって、$a\leqq b$ より、$a\leqq -2a+15$

$\therefore\quad a\leqq 5$

これより

①：$a=5$ のとき

$(a、a+3、b)=(5、8、5)$ となるので、10個のデータを小さい順に並べると

1、2、2、5、5、8、8、9、10、10

これより、中央値は $\dfrac{5+8}{2}=\dfrac{13}{2}$ より、不適。

②：$a=4$ のとき

$(a、a+3、b)=(4、7、7)$ となるので、10個のデータを小さい順に並べると

1、2、2、4、7、7、8、9、10、10

これより、中央値は $\dfrac{7+7}{2}=7$ より、適する。

③：$a=3$ のとき

$(a、a+3、b)=(3、6、9)$ となるので、10個のデータを小さい順に並べると

1、2、2、3、6、8、9、9、10、10

これより、中央値は $\dfrac{6+8}{2}=7$ より、適する。

④：$a=2$ のとき

$(a、a+3、b)=(2、5、11)$ となるので、10個のデータを小さい順に並べると

1、2、2、2、5、8、9、10、10、11

これより、中央値は $\dfrac{5+8}{2}=\dfrac{13}{2}$ より、不適。

⑤：$a=1$ のとき

$(a、a+3、b)=(1、4、13)$ となるので、10個のデータを小さい順に並べると

1、1、2、2、4、8、9、10、10、13

これより、中央値は $\dfrac{4+8}{2}=6$ より、不適。

以上より、中央値が7となる組は $(a,\ b)=(4、7)、(3、9)$ の2個である。

別解　④、⑤をまとめて

$a\leqq 2$ のとき

$a+3\leqq 5$、$b=-2a+15\geqq 11$ となるので、10個のデータを小さい順に並べると

1、a、2、2、$a+3$、8、9、10、10、b

となるので、中央値は $\dfrac{(a+3)+8}{2}=\dfrac{a+11}{2}\leqq\dfrac{13}{2}$ より、7となることはないので不適。

3 2つの関数 $f(x)=16\log\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)$、$g(x)=f(x)+x\sqrt{x^2+16}$ について次の問に答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

（i） 曲線 C：$y=g(x)$ $(x\geqq 0)$ 上の点 $(3、g(3))$ における曲線 C の接線の方程式を求めよ。

（ii） 曲線 $y=xf(x)$ $(x\geqq 0)$、直線 $x=3$、および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解説

（i） $f'(x)=\dfrac{16}{x+\sqrt{x^2+16}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}\right)$

$=\dfrac{16}{x+\sqrt{x^2+16}}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}}$

$=\dfrac{16}{\sqrt{x^2+16}}$ ………① より

$g'(x)=f'(x)+\sqrt{x^2+16}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$

$=\dfrac{16}{\sqrt{x^2+16}}+\sqrt{x^2+16}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$

$=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}+\sqrt{x^2+16}$

$=2\sqrt{x^2+16}$ ………②

また、$f(3)=16\log\left(3+\sqrt{3^2+16}\right)$

$=16\log 8$

$=48\log 2$

$g(3)=f(3)+3\sqrt{3^2+16}$

$=48\log 2+15$

よって、$(3、g(3))$ における接線は

$y=g'(3)(x-3)+g(3)$

$\therefore$ $y=10(x-3)+48\log 2+15$

$\therefore$ $y=10x+48\log 2-15$

（ii） $x\geqq 0$ で、$xf(x)\geqq 0$ より、求める面積を S とすると

$S=\displaystyle\int_0^3 xf(x)dx$

$=\displaystyle\int_0^3\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\cdot f(x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}x^2\cdot f(x)\right]_0^3-\displaystyle\int_0^3\frac{1}{2}x^2\cdot f'(x)dx$

$=\dfrac{9}{2}\cdot f(3)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^3 x^2\cdot\frac{16}{\sqrt{x^2+16}}dx$

$=\dfrac{9}{2}\cdot f(3)-8\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx$ ………(※)

$=\dfrac{9}{2}\cdot f(3)-8\displaystyle\int_0^3\frac{x^2+16-16}{\sqrt{x^2+16}}dx$

$=\dfrac{9}{2}\cdot f(3)-8\displaystyle\int_0^3\left(\sqrt{x^2+16}-\frac{16}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx$

ここで、①、② より

$\displaystyle\int\frac{16}{\sqrt{x^2+16}}dx=f(x)+C_1$ （C_1：積分定数）

$\displaystyle\int\sqrt{x^2+16}\,dx=\frac{1}{2}g(x)+C_2$ （C_2：積分定数）

よって

$S=\dfrac{9}{2}\cdot f(3)-8\left[\dfrac{1}{2}g(x)-f(x)\right]_0^3$

$=\dfrac{9}{2}\cdot f(3)-8\left[\left\{\dfrac{1}{2}\cdot g(3)-f(3)\right\}-\left\{\dfrac{1}{2}\cdot g(0)-f(0)\right\}\right]$

$=\dfrac{25}{2}\cdot f(3)-4\cdot g(3)+4\cdot g(0)-8\cdot f(0)$

$=\dfrac{25}{2}\cdot f(3)-4\cdot g(3)-4\cdot f(0)$ （$\because$ $g(0)=f(0)$）

$=\dfrac{25}{2}\cdot 48\log 2-4(48\log 2+15)-4\cdot 32\log 2$

$=280\log 2-60$

別解 (※)の続き

ここで、$\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx$ について

$x=4\tan\theta$ とおくと、$dx=\dfrac{4d\theta}{\cos^2\theta}$

$x:0\to 3$ のとき、$\theta:0\to\alpha$ $\left(\text{ただし、}\alpha\text{ は }\tan\alpha=\dfrac{3}{4}\text{ を満たす鋭角とする}\right)$

よって、$\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int_0^\alpha\frac{16\tan^2\theta}{\sqrt{16(1+\tan^2\theta)}}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta}d\theta$

$=16\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\tan^2\theta}{\cos\theta}d\theta$

$=16\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$

$=16\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta}d\theta$

$=16\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{(\cos^2\theta)^2}d\theta$

$=16\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}d\theta$

$\sin\theta=u$ とおくと、$\cos\theta\,d\theta=d\theta$

$\theta:0\to\alpha$ のとき、$u:0\to\dfrac{3}{5}$ $\left(\tan\alpha=\dfrac{3}{4}\text{ より、}\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\right)$

よって、$16\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}d\theta=16\int_0^{\frac{3}{5}}\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt$

$=16\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}}\left(\frac{t}{1-t^2}\right)^2dt$

ここで、$\dfrac{t}{1-t^2}=\dfrac{t}{(1-t)(1+t)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{1}{1+t}\right)$

よって、$\left(\dfrac{t}{1-t^2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{2}{(1-t)(1+t)}+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{(1-t)^2}-\left(\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1+t}\right)+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right\}$

これより

$16\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}}\left(\frac{t}{1-t^2}\right)^2dt=16\int_0^{\frac{3}{5}}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1-t)^2}-\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)+\frac{1}{(1+t)^2}\right\}dt$

$=4\left[\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{1}{1+t}+\log|1-t|-\log|1+t|\right]_0^{\frac{3}{5}}$

$=4\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{8}+\log\dfrac{2}{5}-\log\dfrac{8}{5}\right)$

$=\dfrac{15}{2}-8\log 2$

よって、(※)より

$S=\dfrac{9}{2}\cdot 48\log 2-8\left(\dfrac{15}{2}-8\log 2\right)$

$=280\log 2-60$