◇２０２４年度　藤田医科後期

1 次の問いに答えよ。

(1)　a を定数項とする多項式 $x^2+xy-6y^2-x+7y+a$ が 1 次式の積に因数分解できるとき、$a=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　N を $200\leqq N\leqq 299$ を満たす整数とするとき、N と N^2 の下 2 桁が一致する最大の N は $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。

(3)　n を 3 以上の整数とする。1 個のサイコロを n 回投げるとき、3 以下の目が出る回数が $(n-2)$ 回以上となる確率が 0.01 を下回る最小の n は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(4)　△ABC において 3 辺の長さが $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$、$\mathrm{BC}=2$、$\mathrm{CA}=1+\sqrt{6}$ であるとき $\angle\mathrm{ABC}=$ $\boxed{\text{クケコ}}$°である。

(5)　$(7\cos\theta+5\sin\theta)(7\sin\theta-5\cos\theta)$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値は $\boxed{\text{サシ}}$、最小値は $\boxed{\text{スセソ}}$ である。

(6)　ベクトル $\vec{a}$ が、2 つのベクトル $\vec{b}=(1、-3、1)$、$\vec{c}=(3、-1、-2)$ の両方に垂直であり、ベクトル $\vec{d}=(5、-3、-2)$ との内積が 4 のとき、

$\vec{a}=\left(\boxed{\text{タ}}、\boxed{\text{チ}}、\boxed{\text{ツ}}\right)$ である。

(7)　i を虚数単位とするとき、$\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+i}}=\cos\dfrac{\pi}{\boxed{\text{テト}}}+i\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

(8)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(k+\frac{1}{k}+2\right)-\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=12$ のとき、$n=$ $\boxed{\text{ヌネ}}$ である。

(9)　$-1<x<1$ で定義される関数 $f(x)$ の第 2 次導関数が存在し、$x^5+(x+1)\{f(x)\}^3=27$ が満たされるとき、$f(0)=\boxed{\text{ノ}}$、$f'(0)=\boxed{\text{ハヒ}}$、$f''(0)=\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

(10)　実数全体で定義される関数 $f(x)$ が $f(x)=x^3-\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(t)\}^3dt$ を満たすとき、

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$ である。

解説

(1)　$x^2+xy-6y^2-x+7y+a=0$ とおくと

$$x=\frac{-y+1\pm\sqrt{25y^2-30y-4a+1}}{2}$$

$25y^2-30y-4a+1$ が 0 か平方数となるとき、与式は 1 次式の積に因数分解できる。

0 になることはないので、$25y^2-30y-4a+1=0$ の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=15^2-25\cdot(-4a+1)=0$$

$$\therefore\quad a=-2$$

別解　(与式)$=(x+py+q)(x+ry+s)$ とおくと (p、q、r、s は整数で、$p>r$ とする)

$(x+py+q)(x+ry+s)=x^2+(p+r)xy+pry^2+(q+s)x+(ps+qr)y+qs$

与式と係数比較をすると

$$\begin{cases} p+r=1 & \cdots\cdots① \\ pr=-6 & \cdots\cdots② \\ q+s=-1 & \cdots\cdots③ \\ ps+qr=7 & \cdots\cdots④ \\ qs=a & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

①、② より、p、r は二次方程式 $X^2-X-6=0$ の解より

$$(X+2)(X-3)=0$$

$$\therefore\quad X=-2、3$$

$p>r$ より、$p=3$、$r=-2$

③ より、$-2+s=-1$

$$\therefore\quad s=1$$

④ より、$3\cdot1+q\cdot(-2)=7$

$$\therefore\quad q=-2$$

⑤ より、$a=(-2)\cdot1=-2$

(2)　$N=200+10a+b$ とおくと (ただし、a、b は 0 以上 9 以下の整数とする)

N^2 の下 2 桁は $10a+b$ の 2 乗の下 2 桁と一致するので

$$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$$

より、題意を満たす数は、$10a+b$ と $20ab+b^2$ の下 2 桁が一致する。

$10a+b$ の下 1 桁は b、$20ab+b^2$ の下 1 桁は b^2 の下 1 桁となるので

$$b=0、1、5、6$$

となる。$A=10a+b$、$B=20ab+b^2$ とおくと

・$b=0$ のとき

$$\begin{cases} A=10a \\ B=0 \end{cases}$$

となるので、A と B の下 2 桁が一致するのは、$a=0$ である。

よって、$N=200$

・$b=1$ のとき

$$\begin{cases} A=10a+1 \\ B=20a+1 \end{cases}$$

となるので、A の下から 2 桁目の数は a、B の下から 2 桁目の数は、$2a$ の下 1 桁の数である。よって

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2a$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18

表より、A と B の下 2 桁が一致するのは、$a=0$ となる。

よって、$N=201$

・$b=5$ のとき

$$\begin{cases} A=10a+5 \\ B=100a+25 \end{cases}$$

となるので、A の下から 2 桁目の数は a、B の下から 2 桁目の数は、2 より

A と B の下 2 桁が一致するのは、$a=2$ となる。

よって、$N=225$

・$b=6$ のとき

$$\begin{cases} A=10a+6 \\ B=120a+36 \end{cases}$$

となるので、A の下から 2 桁目の数は a、B の下から 2 桁目の数は $2a+3$ の下 1 桁の数となる。よって

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2a+3$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

表より、A と B の下 2 桁が一致するのは、$a=7$ となる。

よって、$N=276$

以上より、$N=276$

別解　N と N^2 の下 2 桁が一致するのは、$N^2-N=N(N-1)$ が 100 の倍数となるときである。

また、N と $N-1$ は互いに素で、$100=2^4\cdot5^4$ より N と $N-1$ のどちらかは 25 の倍数である。

$200\leqq N\leqq 299$ を満たす 25 の倍数は、200、225、250、275 であるので、$N-1=275$ とすると、$N=276$ となる。このとき、N が 4 の倍数、$N-1$ が 25 の倍数より、

$N(N-1)$ は 100 の倍数となるので適する。よって、$N=276$

(3)　1 個のサイコロを n 回投げるとき、3 以下の目が出る回数が $(n-2)$ 回以上となる確率を p_n とすると

$$p_n=\left(\frac{3}{6}\right)^n+{}_nC_1\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}+{}_nC_2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{n^2+n+2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ここで、$p_{n+1}-p_n=\dfrac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{n^2+n+2}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$=-n(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$n\geqq3$ で、$p_{n+1}-p_n<0$ となるので p_n は単調減少となる………①

よって、、$p_n<\dfrac{1}{100}$ より

$$\frac{n^2+n+2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{100}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$\therefore\quad 100(n^2+n+2)<2^{n+1}$$

$n=13$ を代入すると、$18400<16384$ で不適

$n=14$ を代入すると、$21200<32768$ となり適する。

よって、① より、$n\geqq14$ で ② は成り立つので、最小の n は14

(4)　余弦定理より

$$(1+\sqrt{6})^2=(\sqrt{3})^2+(2)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}$$

$$\therefore\quad 4\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{ABC}=-2\sqrt{6}$$

$$\therefore\quad \cos\angle\mathrm{ABC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、$\angle\mathrm{ABC}=135^\circ$

(5)　$(7\cos\theta+5\sin\theta)(7\sin\theta-5\cos\theta)=35\sin^2\theta+24\sin\theta\cos\theta-35\cos^2\theta$

$$=35\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+24\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-35\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$=12\sin 2\theta-35\cos 2\theta$$

$$=37\sin(2\theta-\alpha)$$

$\left(\text{ただし、}\alpha\text{ は、}\cos\alpha=\frac{12}{37}\text{、}\sin\alpha=\frac{35}{37}\text{ を満たす鋭角}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より、$-\alpha\leqq 2\theta-\alpha\leqq\pi-\alpha$

よって、$2\theta-\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき、最大値 37

$2\theta-\alpha=-\alpha$ のとき、つまり $\theta=0$ のとき、最小値 -35

(6)　$\vec{a}=(x、y、z)$ とおくと

$\vec{a}\perp\vec{b}$ かつ $\vec{a}\perp\vec{c}$ より、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ かつ $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

よって、$x-3y+z=0$ …… ① かつ $3x-y-2z=0$ …… ②

また、$\vec{a}\cdot\vec{d}=4$ より、$5x-3y-2z=4$ …… ③

① ～ ③ を連立して、$x=7$、$y=5$、$z=8$

よって、$\vec{a}=(7、5、8)$

(7)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0、0\leqq\theta<2\pi)$ として

$z=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i}}$ とおくと

$$z^2=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i}$$

$$\therefore\quad z^2=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\therefore\quad z^2=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\therefore\quad r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$$

よって、$\begin{cases} r^2=1 \\ 2\theta=\frac{\pi}{12}+2k\pi \quad (k\text{ は整数}) \end{cases}$

$$\therefore\quad \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{24}+k\pi \end{cases}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より、$k=0、1$

よって、$z=\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}$、$\cos\frac{25}{24}\pi+i\sin\frac{25}{24}\pi$

解答欄に適するものは、$z=\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}$

(8)　(左辺)$=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(k+\frac{1}{k}+2\right)-\sum_{k=1}^{n}\log_2 k$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k^2+1+2k}{k^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{k}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\{\log_2(k+1)-\log_2 k\}$$

$$=2[(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)+\cdots\cdots+\{\log_2(n+1)-\log_2 n\}]$$

$$=2\{\log_2(n+1)-\log_2 1\}$$

$$=2\log_2(n+1)$$

よって、$2\log_2(n+1)=12$

$$\therefore\quad \log_2(n+1)=6$$

$$\therefore\quad n+1=2^6$$

$$\therefore\quad n=63$$

(9)　$x^5+(x+1)\{f(x)\}^3=27$ …… ① に $x=0$ を代入すると、

$$\{f(0)\}^3=27$$

$f(0)$ は実数より、$f(0)=3$

① の両辺を x で微分すると

$$5x^4+\{f(x)\}^3+(x+1)\cdot 3f'(x)\cdot\{f(x)\}^2=0 \cdots\cdots ②$$

$x=0$ を代入すると

$$\{f(0)\}^3+3f'(0)\cdot\{f(0)\}^2=0$$

$$\therefore\quad 27+27f'(0)=0$$

$$\therefore\quad f'(0)=-1$$

② の両辺を x で微分すると

$$20x^3+3f'(x)\cdot\{f(x)\}^2+3f'(x)\cdot\{f(x)\}^2+(x+1)\cdot 3f''(x)\cdot\{f(x)\}^2$$
$$+(x+1)\cdot 6\{f'(x)\}^2\cdot f(x)=0$$

$$20x^3+6f'(x)\cdot\{f(x)\}^2+(x+1)\cdot 3f''(x)\cdot\{f(x)\}^2+(x+1)\cdot 6\{f'(x)\}^2\cdot f(x)=0$$

$x=0$ を代入すると

$$6f'(0)\cdot\{f(0)\}^2+3f''(0)\cdot\{f(0)\}^2+6\{f'(0)\}^2\cdot f(0)=0$$

$$\therefore\quad 6\cdot(-1)\cdot 3^2+3f''(0)\cdot 3^2+6\cdot(-1)^2\cdot 3=0$$

$$\therefore\quad f''(0)=\frac{4}{3}$$

(10)　$\int_{-1}^{1}\{f(t)\}^3dt=k$ とおくと、$f(x)=x^3-k$

よって、$k=\int_{-1}^{1}\{f(t)\}^3dt$

$$=\int_{-1}^{1}(t^3-k)^3dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(t^9-3t^6k+3t^3k-k^3)dt$$

$$=2\int_{0}^{1}(-3kt^6-k^3)dt$$

$$=2\left[-\frac{3k}{7}t^7-k^3t\right]_0^1$$

$$=2\left(-\frac{3k}{7}-k^3\right)$$

よって、$k=2\left(-\frac{3k}{7}-k^3\right)$

$$\therefore\quad 14k^3+13k=0$$

$$\therefore\quad k(14k^2+13)=0$$

$$\therefore\quad k=0$$

これより、$f(x)=x^3$ となるので

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}$$

2 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の導関数の定義を述べよ。

(2) $x>0$ で定義される関数 $f(x)=\sqrt{x}$ を導関数の定義に従って微分せよ。

(3) 実数全体で定義される関数 $f(x)=\sin x$ を導関数の定義に従って微分せよ。

ただし、$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ は証明なしに用いてよい。

(解説)

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき、これを関数 $f(x)$ の導関数という。

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

よって、$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)\sin x+\cos x\sin h}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\sin x+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}\cdot\sin x+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}\cdot\sin x+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left\{-\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cdot\frac{h}{1+\cos h}\cdot\sin x+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right\}\\&=\cos x\end{aligned}$$

よって、$f'(x)=\cos x$

別解
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\&=\cos x\end{aligned}$$

よって、$f'(x)=\cos x$

3 4 個の値からなるデータ

11、35、−1、7

をデータ A とし、5 個の値からなるデータ

11、35、−1、7、x

をデータ B とする。ただし、データ A とデータ B の分散は等しく、x は正の数値である。次の問いに答えよ。

(1) データ A の平均値と分散を求めよ。

(2) x の値を求めよ。

(3) 平均値が 1、分散が 15 の 10 個の値からなるデータがある。このデータをデータ B に追加してできる 15 個の値からなるデータをデータ C とした。データ C の平均値と分散を求めよ。

(解説)

(1) データ A の平均値は
$$\frac{11+35-1+7}{4}=13$$

分散は、
$$\frac{(11-13)^2+(35-13)^2+(-1-13)^2+(7-13)^2}{4}=\frac{4+484+196+36}{4}=180$$

別解 分散は、
$$\begin{aligned}\frac{11^2+35^2+(-1)^2+7^2}{4}-13^2&=\frac{121+1225+1+49}{4}-169\\&=349-169\\&=180\end{aligned}$$

(2) データ B の平均値は
$$\frac{11+35-1+7+x}{5}=\frac{52+x}{5}$$

分散は、データ A と等しいので
$$\frac{11^2+35^2+(-1)^2+7^2+x^2}{5}-\left(\frac{52+x}{5}\right)^2=180$$
$$\therefore\ \frac{4x^2-104x-224}{25}=0$$
$$\therefore\ x^2-26x-56=0$$
$$\therefore\ (x+2)(x-28)=0$$

$x>0$ より、$x=28$

(3) 追加された 10 個のデータを c_k ($k=1$、2、……、10) とすると
$$\begin{cases}\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}c_k=1\\\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}{c_k}^2-1^2=15\end{cases}$$
$$\therefore\ \begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}c_k=10\\\displaystyle\sum_{k=1}^{10}{c_k}^2=160\end{cases}$$

よって、データ C の平均値は
$$\frac{1}{15}\left(11+35-1+7+28+\sum_{k=1}^{10}c_k\right)=\frac{80+10}{15}=6$$

分散は
$$\begin{aligned}\frac{1}{15}\left\{11^2+35^2+(-1)^2+7^2+28^2+\sum_{k=1}^{10}{c_k}^2\right\}-6^2&=\frac{2180+160}{15}-36\\&=120\end{aligned}$$