◇２０２４年度　藤田医科前期

1 次の問いに答えよ。

(1)　5 個のさいころを投げて出た目の 5 つの数字を左から小さい順に並べるとき、1 番左の数字が 3 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ であり、左から 2 番目の数字が 3 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(2)　2024^2 の正の約数の個数は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

(3)　xy 平面上に 2 点 A$(0,\ 8)$、B$(0,\ 98)$、と動点 P$(p,\ 0)$ がある。
$p>0$ の範囲で点 P が動くとき、$\angle$APB は $p=\boxed{\text{サシ}}$ のとき最大となる。

(4)　実数 a に対して xy 平面上の 3 点 O$(0,\ 0)$、A$(-a,\ a^2)$、B$(a,\ a^2)$ を頂点とする $\triangle$OAB の内心の座標が $(0,\ 380)$ のとき、$\triangle$OAB の内接円の半径は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

(5)　実数 x、y、z に対して $x+y+z=\sqrt{3}+2$、$xy+yz+zx=5$、$xyz=10$ のとき、$x^3+y^3+z^3=\boxed{\text{ソタ}}$ である。

(6)　実数 x、y に対して、$x\leqq y$ のとき、$x^2+2y^2-8x-4y+9$ の最小値は $\boxed{\text{チツ}}$ である。

(7)　$\displaystyle\int_{-5}^{7}\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}\,dx=\boxed{\text{テトナ}}$ である。

(8)　複素数平面上の 3 点O(0)、A$(5-i)$、B$(-4+6i)$ に対して、$\angle\text{AOB}=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\pi$ である。ただし、$0<\angle\text{AOB}<\pi$、i は虚数単位とする。

(9)　$a=\log_{0.1}3$ のとき、$0.0001^a=\boxed{\text{ネノ}}$ である。

(10)　関数 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ とするとき、微分係数 $f'\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)=\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

解説

(1)　1 番左が 3 以下ということは、少なくとも 1 個は 3 以下の目が出ればよい。
すべて 4 以上となる確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

よって、求める確率は

$$1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

左から 2 番目が 3 以下ということは、少なくとも 2 個は 3 以下の目が出ればよい。
1 個が 3 以下で、残りすべてが 4 以上となる確率は、

$${}_5C_1\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$$

よって、求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{32}+\frac{5}{32}\right)=\frac{13}{16}$$

(2)　$2024^2=2^6\cdot 11^2\cdot 23^2$ より、正の約数の個数は

$$(1+6)(1+2)(1+2)=63$$

(3)　$\angle\text{OPA}=\alpha$、$\angle\text{OPB}=\beta\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$\tan\alpha=\dfrac{8}{p}$、$\tan\beta=\dfrac{98}{p}$ となる。

また、$\angle\text{APB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}\\&=\frac{\dfrac{98}{p}-\dfrac{8}{p}}{1+\dfrac{8}{p}\cdot\dfrac{98}{p}}\\&=\frac{90}{p+\dfrac{784}{p}}\end{aligned}$$

ここで、$p>0$、$\dfrac{784}{p}>0$ より
相加相乗平均の大小関係から

$$p+\frac{784}{p}\geqq 2\sqrt{p\cdot\frac{784}{p}}=28$$

等号は、$p=\dfrac{784}{p}$ のとき
つまり、$p^2=784$
$p>0$ より、$p=28$ のとき最小となる。
これより

$$\tan\theta=\frac{90}{p+\dfrac{784}{p}}\leqq\frac{45}{28}$$

となるので、$p=28$ で最大値となる。
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\theta$ は単調増加なので、$\tan\theta$ が最大のとき、θ も最大となる。
よって、$\angle$APB は $p=28$ で最大となる。

(4)　$\triangle$OAB は y 軸対称の二等辺三角形より、半径を r とすると、
直線 OB : $y=ax$ より

$$\begin{cases}r=a^2-380\ \cdots\cdots\cdots①\\ r=\dfrac{380}{\sqrt{1+a^2}}\ \cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

① より、$a^2=r+380$
② に代入して

$$r=\frac{380}{\sqrt{381+r}}$$

$\therefore\ \ r\sqrt{381+r}=380$
$\therefore\ \ r^2(381+r)=380^2$
$\therefore\ \ r^3+381r^2-380^2=0$
$\therefore\ \ (r-19)(r+20)(r+380)=0$
$r>0$ より、$r=19$

(5)　$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$$\begin{aligned}&=(\sqrt{3}+2)^2-2\cdot 5\\&=4\sqrt{3}-3\end{aligned}$$

よって、$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$ より

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3&=(\sqrt{3}+2)\{(4\sqrt{3}-3)-5\}-3\cdot 10\\&=(\sqrt{3}+2)(4\sqrt{3}-8)+30\\&=26\end{aligned}$$

別解　実数 x、y、z は、t に関する方程式

$$t^3-(\sqrt{3}+2)t^2+5t-10=0$$

の 3 解より

$$\begin{cases}x^3-(\sqrt{3}+2)x^2+5x-10=0\\ y^3-(\sqrt{3}+2)y^2+5y-10=0\\ z^3-(\sqrt{3}+2)z^2+5z-10=0\end{cases}$$

が成り立つ。辺々を加えて

$x^3+y^3+z^3+(\sqrt{3}+2)(x^2+y^2+z^2)+5(x+y+z)-30=0$

$\therefore\ \ x^3+y^3+z^3=(\sqrt{3}+2)(x^2+y^2+z^2)-5\cdot(\sqrt{3}+2)+30$

ここで、$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$=(\sqrt{3}+2)^2-2\cdot 5$
$=4\sqrt{3}-3$　より

$x^3+y^3+z^3=(\sqrt{3}+2)(4\sqrt{3}-3)-5\cdot(\sqrt{3}+2)+30$
$=26$

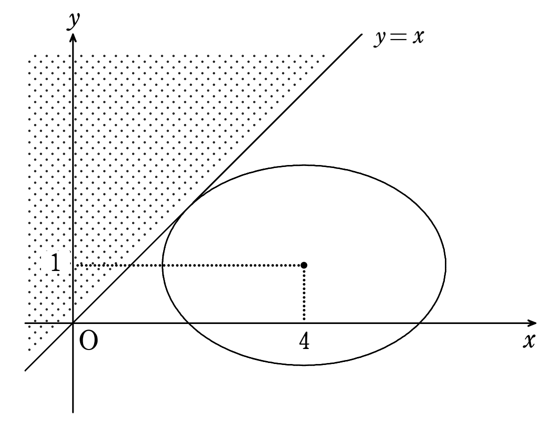
(6)　$x^2+2y^2-8x-4y+9=k$ とおくと

$$(x-4)^2+2(y-1)^2=k+9$$

($k=-9$ のとき、$y\geqq x$ を満たさないので、$k>-9$)

$$\therefore\ \ \frac{(x-4)^2}{k+9}+\frac{(y-1)^2}{\dfrac{k+9}{2}}=1\ \ \cdots\cdots\cdots①$$

より、① は 中心 $(4,\ 1)$、 長軸 $2\sqrt{k+9}$、短軸 $\sqrt{2}\sqrt{k+9}$ の楕円となる。
よって、① を $y\geqq x$ と共有点をもつように動かすときの、k が最小となる点を考える。



これは、① と $y=x$ が接するときより、連立して

$$x^2+2x^2-8x-4x+9=0$$
$$\therefore\ \ 3x^2-12x+9-k=0$$

これが、重解をもてばよいので、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=36-3\cdot(9-k)=0$$
$$\therefore\ \ k=-3$$

以上より、求める最小値は -3

(7)　$x^4+2x^3-3x^2-4x+4=(x-1)^2(x+2)^2$ となるので

$$(\text{与式})=\int_{-5}^{7}\sqrt{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$$
$$=\int_{-5}^{7}|(x-1)(x+2)dx|$$

$x-1=t$ とおくと、$dx=dt$

x：$-5\to7$ のとき、t：$-6\to6$

よって、$(\text{与式})=\displaystyle\int_{-6}^{6}|t(t+3)|dt$

$$=\int_{-6}^{-3}t(t+3)dt-\int_{-3}^{0}t(t+4)dt+\int_{0}^{6}t(t+3)dt$$
$$=\left\{\int_{-6}^{-3}t(t+3)dt+\int_{-3}^{0}t(t+3)dt+\int_{0}^{6}t(t+3)dt\right\}-2\int_{-3}^{0}t(t+3)dt$$
$$=\int_{-6}^{6}t(t+3)dt-2\int_{-3}^{0}t(t+3)dt$$
$$=2\int_{0}^{6}t^2dt-2\cdot\frac{1}{6}\{0-(-3)\}^3$$
$$=2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^6+9$$
$$=153$$

(8)　$\dfrac{\beta-0}{\alpha-0}=\dfrac{-4+6i}{5-i}$

$$=\frac{(-4+6i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$$
$$=-1+i$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって、$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{3}{4}\pi$

(9)　$a=\log_{0.1}3$ より、$0.1^a=3$

よって、$0.0001^a=\{(0.1)^4\}^a$

$$=\{(0.1)^a\}^4$$
$$=3^4$$
$$=81$$

(10)　$y=\sin x$ の逆関数より、$x=\sin y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\sin^2y+\cos^2y=1$ から、$\cos^2y=1-x^2$

$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ より、$\cos y=\sqrt{1-x^2}$

よって、$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

以上より、$f'\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}}=\dfrac{4}{3}$

2 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$、$na_{n+1}=3\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1、2、3、4、\cdots\cdots)$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ を求めよ。

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ とおくと

与式より、$na_{n+1}=3S_n$

$$\therefore\ S_n=\frac{na_{n+1}}{3} \cdots\cdots ①$$

よって、$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{na_{n+1}}{3}-\frac{(n-1)a_n}{3}$$
$$\therefore\ 3a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n$$
$$\therefore\ na_{n+1}=(n+2)a_n \cdots\cdots ②$$

$n=1$ のとき、① より

$$a_1=\frac{a_2}{3}$$
$$\therefore\ a_2=3a_1$$

これは、② に含まれるので、すべての n に対して、② より　$\cdots\cdots$(※)

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n$$

よって、$b_n=b_1$

ここで、$b_1=\dfrac{a_1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$ より

$$b_n=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

別解　(※) の続き

$$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$$

n をずらしていくと

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}、a_{n-1}=\frac{n}{n-2}a_n、a_{n-2}=\frac{n-1}{n-3}a_{n-1}、\cdots\cdots、a_3=\frac{4}{2}a_2、a_2=\frac{3}{1}a_1$$

これらを代入していくと

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$$
$$=(n+1)n\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k a_{k+2}}$ より

$$\frac{a_{k+1}}{a_k a_{k+2}}=\frac{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}{\frac{1}{2}k(k+1)\cdot\frac{1}{2}(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{2}{k(k+3)}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

となるので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k a_{k+2}}=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{9}$$

3 xy 平面において、原点を O とし、点 A の座標を $(1, 0)$、点 B の座標を $(1, 1)$ とする。点 P が、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t^2+2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+st\overrightarrow{\mathrm{OB}}$、$0\leqq s\leqq 1$、$0\leqq t\leqq 1$ を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を領域 D とする。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D を xy 平面に図示せよ。

(2) 領域 D の面積を求めよ。

(3) 領域 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t^2+2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+st\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=(t^2+2t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+st\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}t^2+2t+st\\st\end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases}X=t^2+2t+st \cdots\cdots ①\\ Y=st \cdots\cdots ②\end{cases}$$

とおくと

①、② より、$X=t^2+2t+Y$

$\therefore\ t^2+2t+Y-X=0 \cdots\cdots ③$

また、$0\leqq s\leqq 1$ より、$0\leqq st\leqq t$

$\therefore\ 0\leqq Y\leqq t\leqq 1 \cdots\cdots ④$

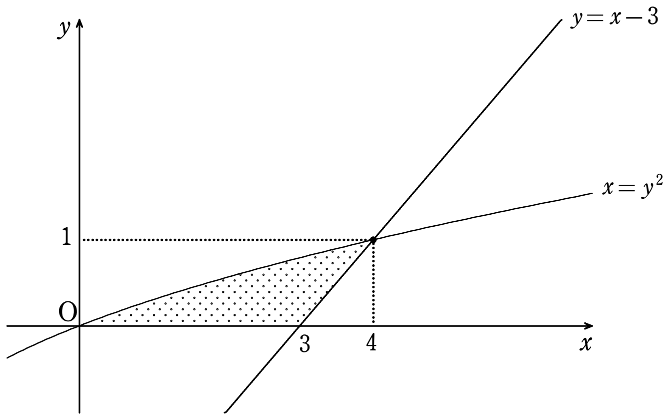
よって、③ が ④ の範囲 で少なくとも 1 つ実数解をもつような、X、Y の領域は

③ の左辺を $f(t)$ とおくと

$$\begin{cases}f(Y)\leqq 0\\ f(1)\geqq 0\\ Y\geqq 0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}Y^2+3Y-X\leqq 0\\ 3+Y-X\geqq 0\\ Y\geqq 0\end{cases}$$

よって、$\begin{cases}x\leqq y^2+3y\\ y\geqq x-3\\ y\geqq 0\end{cases}$ を図示すると、以下のようになる。（境界線を含む）



別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t^2+2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+st\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=(t^2+2t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+st\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}t^2+2t+st\\st\end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases}X=t^2+2t+st \cdots\cdots ①\\ Y=st \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①、② より、$Y=X-t^2-2t \cdots\cdots ③$

t を $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で固定すると

①、②、③ より、点 P は、点 $(t^2+2t, 0)$ と (t^2+3t, t) を結ぶ傾き 1 の線分上を動く。

$0\leqq t\leqq 1$ で t を動かすと

・点 $(t^2+2t, 0)$ については

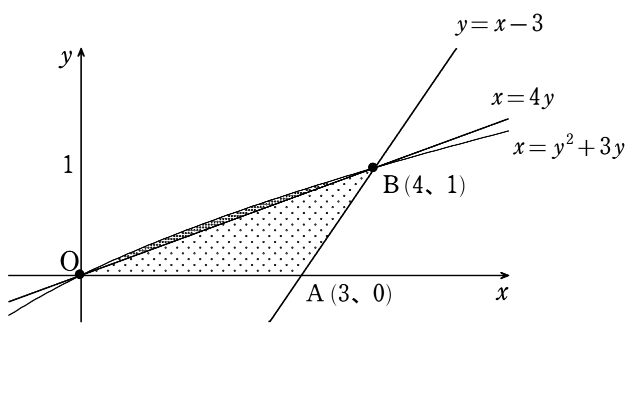
t の増加に伴い、$(0, 0)$ から $(3, 0)$ まで x 軸上を動く。

・点 (t^2+3t, t) については

$x=t^2+3t$、$y=t$ とおくと、$x=y^2+3y$ となり、t の増加に伴い、$(0, 0)$ から $(4, 1)$ まで $x=y^2+3y$ を動く。

よって、求める点 P の存在領域は図（省略）のようになる。ただし境界線は含む。

(2) A $(3, 0)$、B $(4, 1)$ とする。



求める面積を S とすると、S は△OAB と放物線 と直線 OB で囲まれている部分の面積より、直線 OB : $x=4y$ から

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1+\int_0^1\{4y-(y^2+3y)\}dy$$

$$=\frac{3}{2}+\int_0^1 -y(y-1)dy$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}(1-0)^3$$

$$=\frac{5}{3}$$

(3) $x=y^2+3y$ より

$$y^2+3y-x=0$$

$$\therefore\ y=\frac{-3\pm\sqrt{9+4x}}{2}$$

$y\geqq 0$ より、$y=\dfrac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}$

よって、求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^4 y^2dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 1$$

$$=\pi\int_0^4\left(\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}\right)^2dx-\frac{\pi}{3}$$

$$=\pi\int_0^4\left(\frac{9}{2}+x-\frac{3}{2}\sqrt{9+4x}\right)dx-\frac{\pi}{3}$$

$$=\pi\left[\frac{9}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(9+4x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4-\frac{\pi}{3}$$

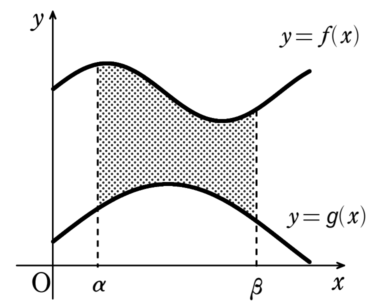
$$=\frac{7}{6}\pi$$

別解 ＜バウムクーヘン分割＞

右の図のような打点部分を y 軸まわりに一回転させてできる立体の体積は

$$V=\int_{x=\alpha}^{x=\beta}2\pi x\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

となる。



注意 記述式で使うのは控えたほうがよい。

以下の解答は、これを y 軸方向で扱う。

求める体積を V とすると

$$V=2\pi\int_0^1 y\{(y+3)-(y^2+3y)\}dy$$

$$=2\pi\int_0^1(-y^3-2y^2+3y)dy$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{4}y^4-\frac{2}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2\right]_0^1$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{7}{6}\pi$$