◇２０２２年　日本医科　前期

1 以下の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ。なお、分数形で解答する場合は、既約分数で答えること。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる１以上の整数が最小となる形で答えよ。

i を虚数単位とする。O を原点とする複素数平面上において、中心が O 、半径が２の円を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して、複素数平面上の点 $\mathrm{Q}(w)$ を次のように定める。

$$w=\frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$$

点 $\mathrm{P}(z)$ が C 上を動くとき、点 $\mathrm{Q}(w)$ は複素数 $\alpha=-\boxed{\text{ア}}\,i$ で表される点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とし、半径 $r=\boxed{\text{イ}}$ の円上を動く。このとき、$z=w$ を満たす C 上の点 z がただ１つ存在し、その点を $\mathrm{B}(\beta)$ とおく。$z\neq\beta$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ に対して、等式

$$\frac{z-w}{z-\beta}=\frac{z-\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\,i}{z+\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,i}$$

が成り立つことを用いると、点 $\mathrm{P}(z)$ が $z\neq\beta$ かつ $\sqrt{5}\,\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{BP}$ を満たしながら C 上を動くとき、BP は最大値 $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ と最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとることが分かる。ただし、複素数平面上の２点 X、Y に対して XY は２点 X、Y の距離を表す。

解説

(ア)、(イ)

与式より、$w=\dfrac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$

$\therefore\ (z+2-2i)w=(4+2i)z+4-4i$

$\therefore\ (w-4-2i)z=-(2-2i)w+4-4i$

ここで、$w=4+2i$ とすると、$0=-8$ となり不適。

よって、$w\neq4+2i$

このとき、$z=\dfrac{-(2-2i)w+4-4i}{w-4-2i}$

$|z|=2$ に代入して

$$\left|\frac{-(2-2i)w+4-4i}{w-4-2i}\right|=2$$

$\therefore\ |-2(1-i)w+4(1-i)|=2|w-4-2i|$

$\therefore\ |-2(1-i)(w-2)|=2|w-4-2i|$

$\therefore\ 2\sqrt{2}\,|w-2|=2|w-4-2i|$

$\therefore\ \sqrt{2}\,|w-2|=|w-4-2i|$　…………①

両辺２乗して

$2|w-2|^2=|w-4-2i|^2$

$\therefore\ 2(w-2)(\overline{w}-2)=(w-4-2i)(\overline{w}-4+2i)$

展開して整理すると

$w\overline{w}-2iw+2i\overline{w}=12$

$\therefore\ (w+2i)(\overline{w}-2i)=16$

$\therefore\ (w+2i)(\overline{w+2i})=16$

$\therefore\ |w+2i|^2=16$

$\therefore\ |w+2i|=4$　($w\neq4+2i$ を満たす)

よって、点 $\mathrm{Q}(w)$ は $\alpha=-2i$ を中心とする半径 $r=4$ の円上を動く。　答

別解　①の続きから

$z=x+yi$ (x、y ：実数) とおくと、①より

$\sqrt{2}\,|(x-2)+yi|=|(x-4)+(y-2)i|$

両辺２乗して

$2\{(x-2)^2+y^2\}=(x-4)^2+(y-2)^2$

展開して整理すると

$x^2+y^2+4y-12=0$

$\therefore\ x^2+(y+2)^2=16$

よって、点 $\mathrm{Q}(w)$ は $\alpha=-2i$ を中心とする半径 $r=4$ の円上を動く。　答

別解　①の続きから

$|w-(4+2i)|:|w-2|=\sqrt{2}:1$

ここで、点 $4+2i$ と点 2 を結ぶ線分を $\sqrt{2}:1$ に内分する点と外分する点は

内分点：$\dfrac{1\cdot(4+2i)+\sqrt{2}\cdot2}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i$

外分点：$\dfrac{-1\cdot(4+2i)+\sqrt{2}\cdot2}{\sqrt{2}-1}=-2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2}-2)i$

となるので、点 $\mathrm{Q}(w)$ はこの２点を結ぶ線分を直径とする円となる。

中心：$\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i+\{-2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2}-2)i\}}{2}=-2i$

半径：$r=\dfrac{1}{2}\left|2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i-\{-2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2}-2)i\}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i\right|=4$

よって、点 $\mathrm{Q}(w)$ は $\alpha=-2i$ を中心とする半径 $r=4$ の円上を動く。　答

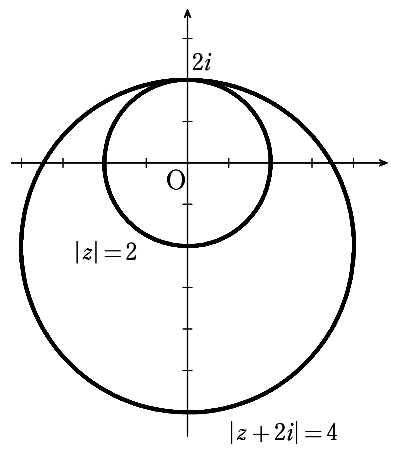
(ウ)～(カ)

２円 $C:|z|=2$ と $|z+2i|=4$ は右図より

ただ１つの共有点 $z=2i$ をもつ。

これより、$\beta=2i$ となるので

$z\neq\beta$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ に対して



$$\frac{z-w}{z-\beta}=\frac{z-\dfrac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}}{z-2i}$$

$$=\frac{z(z+2-2i)-\{(4+2i)z+4-4i\}}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$=\frac{z^2-2(1+2i)z-4+4i}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$=\frac{(z-2i)(z-2-2i)}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$=\frac{z-2-2i}{z+2-2i}$$　答

が成り立つ。

(キ)～(サ)

$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BP}}=\left|\dfrac{z-w}{z-\beta}\right|=\left|\dfrac{z-2-2i}{z+2-2i}\right|$ より

$\sqrt{5}\,\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{BP}$ から、$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BP}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \left|\dfrac{z-2-2i}{z+2-2i}\right|\leqq\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \sqrt{5}\,|z-2-2i|\leqq|z+2-2i|$　………②

両辺２乗して

$5|z-2-2i|^2\leqq|z+2-2i|^2$

$\therefore\ 5(z-2-2i)(\overline{z}-2+2i)\leqq(z+2-2i)(\overline{z}+2+2i)$

展開して整理すると

$z\overline{z}-(3+2i)z-(3+2i)\overline{z}\leqq-8$

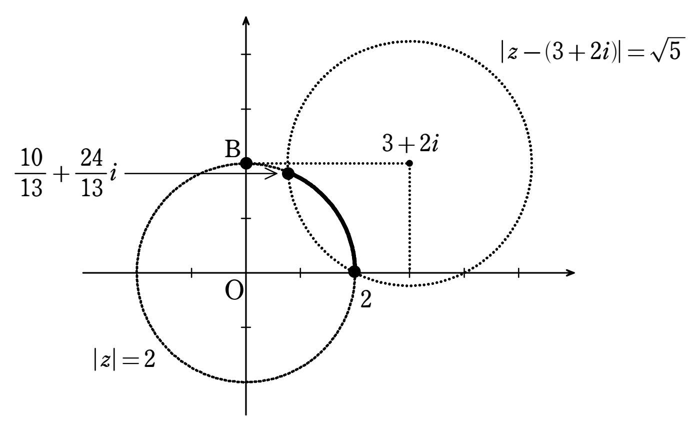
$\therefore\ \{z-(3+2i)\}\{\overline{z}-(3-2i)\}\leqq5$

$\therefore\ \{z-(3+2i)\}\{\overline{z-(3+2i)}\}\leqq5$

$\therefore\ |z-(3+2i)|^2\leqq5$

$\therefore\ |z-(3+2i)|\leqq\sqrt{5}$

よって、点 $\mathrm{P}(z)$ は、中心が点 $3+2i$ で半径が $\sqrt{5}$ の円の周及び内部を動くので $|z|=2$ と合わせて、点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲は次図の太線部分となる。



よって、上図から BP が最大となるのは $\mathrm{P}(2)$ のときより、

最大値は、$|2i-2|=2\sqrt{2}$　答

また、BP が最小となるのは $\mathrm{P}\left(\dfrac{10}{13}+\dfrac{24}{13}i\right)$ のときより

最小値は、$\left|2i-\left(\dfrac{10}{13}+\dfrac{24}{13}i\right)\right|=\left|-\dfrac{10}{13}+\dfrac{2}{13}i\right|=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$　答

別解　②の続きから　$\sqrt{5}\,|z-2-2i|\leqq|z+2-2i|$

$z=x+yi$ (x、y ：実数) とおくと、①より

$\sqrt{5}\,|(x-2)+(y-2)i|\leqq|(x+2)+(y-2)i|$

両辺２乗して

$5\{(x-2)^2+(y-2)^2\}\leqq(x+2)^2+(y-2)^2$

展開して整理すると

$x^2+y^2-6x-4y+8\leqq0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-2)^2\leqq5$

よって、点 $\mathrm{P}(z)$ は、中心が点 $3+2i$ で半径が $\sqrt{5}$ の円の周及び内部を動く。(以下略)

別解　②の続きから

$|z-(-2+2i)|:|z-(2+2i)|=\sqrt{5}:1$

ここで、点 $-2+2i$ と点 $2+2i$ を結ぶ線分を $\sqrt{5}:1$ に内分する点と外分する点は

内分点：$\dfrac{1\cdot(-2+2i)+\sqrt{5}\cdot(2+2i)}{\sqrt{5}+1}=3-\sqrt{5}+2i$

外分点：$\dfrac{-1\cdot(-2+2i)+\sqrt{5}\cdot(2+2i)}{\sqrt{5}-1}=3+\sqrt{5}+2i$

となるので、点 $\mathrm{P}(z)$ はこの２点を結ぶ線分を直径とする円となる。

中心：$\dfrac{(3-\sqrt{5}+2i+\{3+\sqrt{5}+2i\})}{2}=3+2i$

半径：$\dfrac{1}{2}\left|3-\sqrt{5}+2i-(3+\sqrt{5}+2i)\right|=\dfrac{1}{2}\left|-2\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}$　より

点 $\mathrm{P}(z)$ は、中心が点 $3+2i$ で半径が $\sqrt{5}$ の円の周及び内部を動く。(以下略)

2 n を1以上の整数とし、x、y を1以上 n 以下の整数とする。中が見えない2つの箱　A、Bがあり、Aには赤球 x 個と白球 $n-x$ 個が、Bには赤球が y 個と白球 $n-y$ 個が、それぞれ入っている。どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ である1つのさいころを1回投げて、1の目が出たらAから1球取り出し、1以外の目が出たら Bから1球取り出すことを考える。その結果、赤球が取り出されたとき、この赤球がAから取り出された確率を p として以下の各問いに答えよ。

問1　p を求めよ。答えのみでよい。

問2　$\dfrac{1}{6} \leqq p \leqq \dfrac{2}{7}$ を満たす座標平面上の点P$(x,\ y)$ の個数 $N(n)$ を求めよ。

問3　問2の $N(n)$ に対して、$N(n) < 2022$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

解説

問1　X をAから球を取り出される事象、Y を赤球が取り出される事象とする。

このとき、$p = P_Y(X) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ となる。

ここで、$P(X \cap Y) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{6n}$

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(\overline{X} \cap Y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{n} + \frac{5}{6} \cdot \frac{y}{n} = \frac{x+5y}{6n}$$

となるから、$p = \dfrac{x}{x+5y}$　答

問2　$1 \leqq x \leqq n$、$1 \leqq y \leqq n$ のもとで、$\dfrac{1}{6} \leqq p \leqq \dfrac{2}{7}$ より

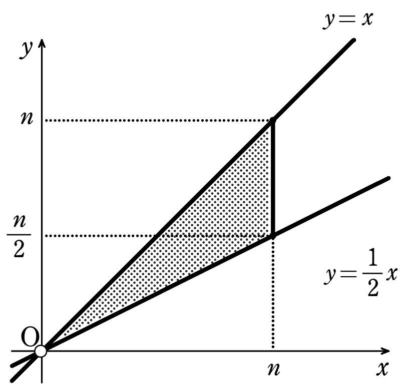
$$\frac{1}{6} \leqq \frac{x}{x+5y} \leqq \frac{2}{7}$$

$$\therefore \begin{cases} x+5y \leqq 6x \\ 7x \leqq 2x+10y \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y \leqq x \\ x \leqq 2y \end{cases}$$

となるので、

領域 D : $\begin{cases} 0 < x \leqq n \\ 0 < y \leqq n \\ y \leqq x \\ x \leqq 2y \end{cases}$　（右図の打点部分で境界線を含む。）に含まれる格子点の個数を求めればよい。



（ｉ）　n が偶数のとき

$y=k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ 上の格子点の個数は、$\begin{cases} 1 \leqq k \leqq \dfrac{n}{2} \text{ のとき、} 2k-k+1 = k+1 \text{ 個} \\ \dfrac{n}{2} \leqq k \leqq n \text{ のとき、} n-k+1 \text{ 個} \end{cases}$ より

求める格子点の総数は

$$N(n) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (k+1) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} (n-k+1)$$

$$= \frac{\frac{n}{2}}{2}\left\{2+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\} + \frac{\frac{n}{2}}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) \quad \text{（等比数列の和の公式より）}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+4)$$

（ⅱ）　n が奇数のとき

$y=k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ 上の格子点の個数は、$\begin{cases} 1 \leqq k \leqq \dfrac{n-1}{2} \text{ のとき、} 2k-k+1 = k+1 \text{ 個} \\ \dfrac{n+1}{2} \leqq k \leqq n \text{ のとき、} n-k+1 \text{ 個} \end{cases}$

より、求める格子点の総数は

$$N(n) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (k+1) + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} (n-k+1)$$

$$= \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left\{2+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right\} + \frac{\frac{n+1}{2}}{2}\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{4}(n^2+4n-1)$$　答

問3

（ｉ）　n が偶数のとき、$n=2m$ (m : 自然数) とおくと

$N(2m) = m^2 + 2m$

$\quad = (m+1)^2 - 1$

$m=43$ のとき、$N(86) = 44^2 - 1 = 1935$

$m=44$ のとき、$N(88) = 45^2 - 1 = 2024$

よって、$N(n)$ の単調増加性より $N(2m) < 2022$ となる最大の n は $n=86$

（ⅱ）　n が奇数のとき、$n=2m-1$ (m : 自然数) とおくと

$N(2m-1) = m^2 + m - 1$

$\quad = m(m+1) - 1$

$m=43$ のとき、$N(87) = 44 \cdot 45 - 1 = 1979$

$m=44$ のとき、$N(89) = 45 \cdot 46 - 1 = 2069$

よって、$N(n)$ の単調増加性より $N(2m-1) < 2022$ となる最大の n は $n=87$

（ｉ）、（ⅱ）より

$N(n) < 2022$ を満たす最大の整数は、$n=87$　答

3 a、b を $a>b>0$ を満たす定数とし、m、k を正の定数とする。O を原点とする座標平面において、楕円$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に直線 $\ell:y=-mx+k$ が第一象限の点 A で接しているとする。また、O から ℓ に垂線 OH を下ろし、2 直線 OA、OH のなす角を θ とする。ただし、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問 1　点A の座標をm、a、b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　線分 OH の長さ h を m、a、b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　$\sin\theta$ を m、a、b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　a、b を固定し、正の実数 m を動かすとき、$\sin\theta$ の最大値 $M(a,\ b)$ を求めよ。

問 5　a、b を$a>b>0$ かつ $(a-b)^2+(b-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}$ を満たすように動かすとき、問 4 の$M(a,\ b)$ の最大値を求めよ。

解説

問 1　C と ℓ の交点 より、連立して

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-mx+k)^2}{b^2}=1$$

展開して整理すると

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2mkx+a^2(k^2-b^2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$a^2m^2+b^2>0$ より、① は二次方程式となり、接するので重解をもつから

判別式を D とすると

$$D/4=a^4m^2k^2-(a^2m^2+b^2)a^2(k^2-b^2)=0$$

$$\therefore\quad a^2b^2(a^2m^2-k^2+b^2)=0$$

$a^2b^2>0$ より、$a^2m^2-k^2+b^2=0$

$$\therefore\quad k=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$k>0$ より、$k=\sqrt{a^2m^2+b^2}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

このとき、① の重解は

$$x=\frac{a^2mk}{a^2m^2+b^2}$$

となり、② より

$$x=\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

このとき、$y=-mx+k$ と ② より

$$=-m\cdot\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$=\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

以上より、$\mathrm{A}\left(\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}、\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$　答

別解　y 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大すると

楕円Cは 円 $C':x^2+y^2=a^2$ に、直線 ℓ は直線 $\ell':\dfrac{b}{a}y=-mx+k$ より

$amx+by-ak=0$ となる。

円 C' と直線 ℓ' が接するので

$$\frac{|-ak|}{\sqrt{a^2m^2+k^2}}=a$$

$$\therefore\quad |k|=\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$k>0$ より、$k=\sqrt{a^2m^2+b^2}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

このとき接線の座標を A$'$ とすると、

接点 A$'$ は ℓ' と原点を通り ℓ' に垂直な直線：$bx-amy=0$ との交点になるので

連立して、$amx+b\left(\dfrac{bx}{am}\right)-ak=0$

$$\therefore\quad (a^2m^2+b^2)x=a^2mk$$

$$\therefore\quad x=\frac{a^2mk}{a^2m^2+b^2}$$

となり、② より

$$x=\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

このとき、$y=\dfrac{b}{am}\cdot\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

よって、$\mathrm{A}'\left(\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}、\dfrac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍して、$\mathrm{A}\left(\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}、\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$　答

問 2　② より、ℓ の方程式は

$$\ell:mx+y-\sqrt{a^2m^2+b^2}=0$$

点 O から直線 ℓ までの距離より

$$h=\frac{\left|m\cdot0+0-\sqrt{a^2m^2+b^2}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$　答

問 3　$\mathrm{OA}=\sqrt{\dfrac{a^4m^2}{a^2m^2+b^2}+\dfrac{b^4}{a^2m^2+b^2}}$

$$=\sqrt{\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2}}$$

よって、$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2}$

$$=\sqrt{\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2}-\frac{a^2m^2+b^2}{m^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a^4m^2+b^2)(m^2+1)-(a^2m^2+b^2)^2}{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a^4-2a^2b^2+b^4)m^2}{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}}\quad (a>b>0 \text{ より})$$

これより、$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{OA}}$

$$=\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}}\cdot\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{a^4m^2+b^4}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^4m^2+b^4)(m^2+1)}}$$　答

問 4

$$\sin\theta=\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{a^4m^4+(a^4+b^4)m^2+b^4}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4m^2+\dfrac{b^4}{m^2}+(a^4+b^4)}}$$

ここで、$a^4m^2>0$、$\dfrac{b^4}{m^2}>0$ より、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\sin\theta\leqq\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2\sqrt{a^4m^2\cdot\dfrac{b^4}{m^2}}+a^4+b^4}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

等号は、$a^4m^2=\dfrac{b^4}{m^2}$ のとき

つまり、$m^4=\left(\dfrac{b}{a}\right)^4$

$m>0$、$a>b>0$ より、$m=\dfrac{b}{a}$ のとき成立。

よって、$\sin\theta$ の最大値 $M(a,\ b)$ は $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$　答

問 5　$\begin{cases}a-b=X\\ b=Y\end{cases}$　とおくと

$a>b>0$ より、$X>0$、$Y>0$ であり

$(a-b)^2+(b-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}$ より、$X^2+(Y-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}$

ここで、$M(a,\ b)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$$=\frac{(X+Y)^2-Y^2}{(X+Y)^2+Y^2}$$

$$=\frac{(X+Y)^2+Y^2-2Y^2}{(X+Y)^2+Y^2}$$

$$=1-\frac{2Y^2}{(X+Y)^2+Y^2}$$

$$=1-\frac{2}{\left(\dfrac{X}{Y}+1\right)^2+1}$$

となるので、$M(a,\ b)$ が最大となるのは、$\dfrac{X}{Y}$ が最大となるとき

すなわち、$\dfrac{Y}{X}$ が最小となるときである。($X>0$、$Y>0$ のもとで)

このとき、$\dfrac{Y}{X}=k$ とおくと、$Y=kX$ より

領域D：$\begin{cases}X>0\\ Y>0\\ X^2+(Y-1)^2\leqq\dfrac{3}{4}\end{cases}$ と直線 $Y=kX$ が共有点

をもつような傾き k の最小値を考える。

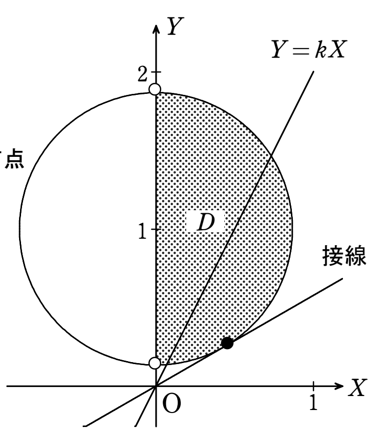
右図において (半) 円と直線 $Y=kX$ が接するとき

傾きは最小となる。円と直線が接するので

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad k^2+1=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad k^2=\frac{1}{3}$$



境界線は Y 軸上は含まず

他はすべて含む。

$k>0$ より、$k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって、$\dfrac{Y}{X}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、$M(a、b)$ は最大で

最大値 $1-\dfrac{2}{(\sqrt{3}+1)^2+1}=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{13}$ となる。　　答

4 関数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$（ただし、$0\leqq x\leqq 1$）に対して、曲線 $y=f(x)$ と x 軸、y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を V とするとき、以下の各問いに答えよ。

問１　曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べて増減表をかき、グラフの概形をかけ。以上に関しては結果のみを解答欄に記せ。特に曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標は、

$$\left(\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}、\frac{\sqrt{\boxed{エ}-\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}}}{\boxed{キ}}\right)$$

となる。$\boxed{ア}$～$\boxed{キ}$ に適する1以上の整数を解答欄に記入せよ。なお、分数形で解答する場合は、既約分数で答えること。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる1以上の整数が最小となる形で答えよ。

問２　V を求めよ。

解説

問１　$0<x<1$ において

$$\log|f(x)|=\frac{1}{2}(\log|1-\sqrt{x}|-\log|1+\sqrt{x}|)$$

両辺を x で微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

よって、$f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}\,(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}\quad より$$

$0<x<1$ で $f'(x)<0$ より、$y=f(x)$ は単調減少する。

このとき、

$$\log|f'(x)|=-\log 2-\frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{2}\log|1-\sqrt{x}|-\frac{3}{2}\log|1+\sqrt{x}|$$

両辺を x で微分して

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{3x-\sqrt{x}-1}{2x(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}$$

よって、$f''(x)=\dfrac{3x-\sqrt{x}-1}{2x(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}\,(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}$

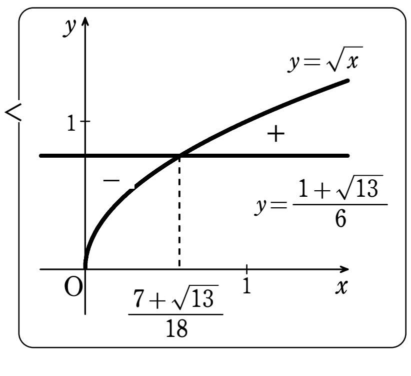
$$=\frac{-(3x-\sqrt{x}-1)}{4x^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{-3\left(\sqrt{x}-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)}{4x^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{-3\left(\sqrt{x}-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)}{4x^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}}$$

(分母)>0、$\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}>0$ より

$-3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$ の符号変化を考えて



増減表は以下のようになる。

x	0		$\frac{7+\sqrt{13}}{18}$		1
$f'(x)$		−	−	−	
$f''(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↘	変曲点	↘	0

このとき、$f\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{18}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\frac{1+\sqrt{13}}{6}}{1+\frac{1+\sqrt{13}}{6}}}$

$$=\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{7+\sqrt{13}}}$$

$$=\frac{\sqrt{(5-\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}}{6}$$

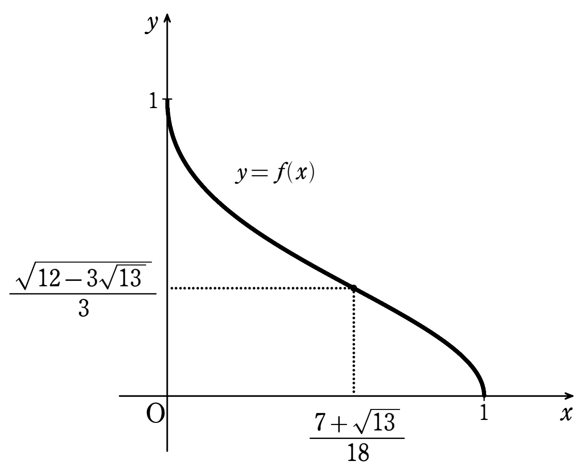
$$=\frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}$$

よって、$y=f(x)$ の変曲点の座標は

$$\left(\frac{7+\sqrt{13}}{18}、\frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}\right)$$ 答

また、$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=-\infty$、$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f'(x)=-\infty$　より

$y=f(x)$ のグラフは、次のようになる。



答

問２　$y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ より、$y^2=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

よって、$\sqrt{x}=\dfrac{1-y^2}{1+y^2}$

$$\therefore\quad x=\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2$$

よって、$V=\pi\displaystyle\int_0^1 x^2dy$

$$=\pi\int_0^1\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^4dy$$

$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと

$$\frac{1-y^2}{1+y^2}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

また、$dy=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ で、$y:0\to1$ のとき、$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ より

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\cdot\frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\cdot\frac{d\theta}{1+\cos\theta}$$

x^4 を $x+1$ で割ると、$x^4=(x+1)(x^3-x^2+x-1)+1$　となることを利用して

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\theta-\cos^2\theta+\cos\theta-1+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}+\cos\theta-1+\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$

$$=\pi\left[\frac{1}{12}\sin3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta+\sin\theta-\theta+\frac{1}{2}\cdot2\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{\pi}{4}-0+1-\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$=\frac{8}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi^2$$ 答