## ◇２０２０年　東京医科大学

**1** (1)　正の整数 $a$ と $b$ について等式

$$\sqrt[3]{301\sqrt{a}-319\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

が成立している。実数 $\sqrt{ab}$ が整数でないとき $a=\boxed{アイ}$ である。

(2)　実数 $\alpha$ が $0\leqq\alpha<2\pi$ の範囲にあり、$\beta$ が $0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあるとき

$$(6\cos\alpha\cdot\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\cdot\sqrt{15\sin\beta})^2$$

の最大値は $\boxed{ウエ}$ である。

(3)　不等式

$$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\frac{1}{48}$$

を満たす正の整数 $m$ の最小値は $\boxed{オカ}$ である。

(4)　不等式

$$(\sqrt[3]{n+1})^4-(\sqrt[3]{n})^4>40$$

を満たす正の整数 $n$ の最小値は $\boxed{キクケコサ}$ である。

(解説)

(1)　両辺を３乗すると　$\sqrt[3]{301\sqrt{a}-319\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$$301\sqrt{a}-319\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3$$

$$\therefore\ 301\sqrt{a}-319\sqrt{b}=a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-b\sqrt{b}$$

$$\therefore\ (a+3b-301)\sqrt{a}=(3a+b+319)\sqrt{b}\ \cdots\cdots\text{①}$$

$$\therefore\ (a+3b-301)\sqrt{ab}=(3a+b+319)b$$

ここで、$a+3b-301\neq0$ とすると

$$\sqrt{ab}=\frac{(3a+b+319)b}{a+3b-301}$$

となる。

このとき、右辺が有理数より、左辺も有理数となるが、$a$、$b$ は正の整数より

左辺は分母に整数をもたない。

よって、右辺の分子が正より、$a+3b-301=1$ となる。

このとき、右辺は整数となるので、左辺も整数となるが、$\sqrt{ab}$ が整数とならないに反する。

よって、① より、$\begin{cases}a+3b-301=0\\3a+b+319=0\end{cases}$ となる。

これを解くと、$a=82$、$b=73$

(2)　$\cos\alpha\cdot6\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\cdot\sqrt{15\sin\beta}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\sqrt{\cos\beta}\\ \sqrt{15\sin\beta}\end{pmatrix}$ より

$\vec{a}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$、$\vec{b}=\begin{pmatrix}6\sqrt{\cos\beta}\\ \sqrt{15\sin\beta}\end{pmatrix}$ とおくと

$$|\vec{a}|^2=1$$

$$|\vec{b}|^2=36\cos\beta+15\sin\beta=39\sin(\beta+\phi)\leqq39$$

$$\left(\text{ただし、}\phi\text{ は }\cos\phi=\frac{5}{13}\text{、}\sin\phi=\frac{12}{13}\text{ を満たす鋭角}\right)$$

となる。よって、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\text{与式})=(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta)^2\leqq|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2=39$$

等号は、$\cos\theta=\pm1$ かつ、$|\vec{b}|^2=39$ のとき

つまり、$\vec{a}\parallel\vec{b}$ かつ、$\beta+\phi=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because\ 0<\beta+\phi<\pi)$ のとき成立する。

よって、$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ より

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}6\sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)}\\ \sqrt{15\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\sqrt{\sin\phi}\\ \sqrt{15\cos\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\sqrt{\dfrac{12}{13}}\\ \sqrt{15\cdot\dfrac{5}{13}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\sqrt{\dfrac{3}{13}}\\ 5\sqrt{\dfrac{3}{13}}\end{pmatrix}$$

このとき、$\vec{a}\parallel\vec{b}$ より、$\vec{a}=k\vec{b}$（$k$ は実数）とおくと

$$|\vec{a}|^2=k^2\cdot|\vec{b}|^2$$

$$\therefore\ 39k^2=1$$

$$\therefore\ k=\pm\frac{1}{\sqrt{39}}$$

よって、$\vec{a}=\pm\dfrac{\vec{b}}{\sqrt{39}}$ より、$\vec{a}=\begin{pmatrix}\pm\dfrac{12}{13}\\ \pm\dfrac{5}{13}\end{pmatrix}$（複号同順）となる。

以上より、$\vec{a}=\begin{pmatrix}\pm\dfrac{12}{13}\\ \pm\dfrac{5}{13}\end{pmatrix}$（複号同順）、$\vec{b}=\begin{pmatrix}12\sqrt{\dfrac{3}{13}}\\ 5\sqrt{\dfrac{3}{13}}\end{pmatrix}$ のとき

最小値 39 となる。

別解　$\beta$ を固定して、$\alpha$ を変数とみると

$$6\cos\alpha\cdot\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\cdot\sqrt{15\sin\beta}=\sqrt{36\cos\beta+15\sin\beta}\sin(\alpha+\phi)$$

（ただし、$\phi$ は $\cos\phi=\dfrac{\sqrt{15\sin\beta}}{\sqrt{36\cos\beta+15\sin\beta}}$、$\sin\phi=\dfrac{6\sqrt{\cos\beta}}{\sqrt{36\cos\beta+15\sin\beta}}$ を満たす鋭角）……①

よって、(与式) $=(36\cos\beta+15\sin\beta)\sin^2(\alpha+\phi)$ となる。

$0\leqq\alpha<2\pi$、$0<\phi<\dfrac{\pi}{2}$ より、$0\leqq\sin^2(\alpha+\phi)\leqq1$

よって、$\alpha+\phi=\dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{3}{2}\pi$ のとき、最大値 $36\cos\beta+15\sin\beta$ となる。

$\beta$ を動かすと

$$36\cos\beta+15\sin\beta=39\sin(\beta+\phi')$$

$$\left(\text{ただし、}\phi'\text{ は }\cos\phi'=\frac{5}{13}\text{、}\sin\phi'=\frac{12}{13}\text{ を満たす鋭角}\right)$$

$0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$、$0<\phi'<\dfrac{\pi}{2}$ より、$0<\sin(\beta+\phi')\leqq1$

よって、$\beta+\phi'=\dfrac{\pi}{2}$ のとき、最大値 39 となる。

このとき、$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\phi'$ より

$$\begin{cases}\sin\beta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi'\right)=\cos\phi'=\dfrac{5}{13}\\ \cos\beta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi'\right)=\sin\phi'=\dfrac{12}{13}\end{cases}$$

① から
$$\begin{cases}\sin\phi=\dfrac{6\sqrt{\dfrac{12}{13}}}{\sqrt{36\cdot\dfrac{12}{13}+15\cdot\dfrac{5}{13}}}=\dfrac{12}{13}\\ \cos\phi=\dfrac{\sqrt{15\cdot\dfrac{5}{13}}}{\sqrt{36\cdot\dfrac{12}{13}+15\cdot\dfrac{5}{13}}}=\dfrac{5}{13}\end{cases}$$

となるので、$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\phi$ のとき

$$\begin{cases}\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\cos\phi=\dfrac{5}{13}\\ \cos\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\sin\phi=\dfrac{12}{13}\end{cases}$$

または、$\alpha=\dfrac{3}{2}\pi-\phi$ のとき

$$\begin{cases}\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\phi\right)=-\cos\phi=-\dfrac{5}{13}\\ \cos\alpha=\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\phi\right)=-\sin\phi=-\dfrac{12}{13}\end{cases}$$

となる。

以上より、$\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\dfrac{12}{13}\\ \pm\dfrac{5}{13}\end{pmatrix}$（複号同順）、$\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{12}{13}\\ \dfrac{5}{13}\end{pmatrix}$ のとき

最大値 39 をとる。

別解　コーシー・シュワルツの不等式の利用

$a$、$b$、$x$、$y$ が実数のとき

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$$

が成り立つ（等号は $a:b=x:y$ のとき成立）

よって、$a=\cos\alpha$、$b=\sin\alpha$、$x=6\sqrt{\cos\beta}$、$y=\sqrt{15\sin\beta}$ とすると

$$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(36\cos\beta+15\sin\beta)\geqq(\cos\alpha\cdot6\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\cdot\sqrt{15\sin\beta})^2$$

$$\therefore\ (6\cos\alpha\cdot\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\cdot\sqrt{15\sin\beta})^2\leqq36\cos\beta+15\sin\beta$$

$$\therefore\ (6\cos\alpha\cdot\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\cdot\sqrt{15\sin\beta})^2\leqq39\sin(\beta+\phi)$$

$$\left(\text{ただし、}\phi\text{ は }\cos\phi=\frac{5}{13}\text{、}\sin\phi=\frac{12}{13}\text{ を満たす鋭角}\right)$$

等号は $\cos\alpha:\sin\alpha=6\sqrt{\cos\beta}:\sqrt{15\sin\beta}$ のとき

つまり、$6\sin\alpha\sqrt{\cos\beta}=\cos\alpha\sqrt{15\sin\beta}$ ………① のとき成立 。

また、$39\sin(\beta+\phi)$ は、$0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$、$0<\phi<\dfrac{\pi}{2}$ より、$0<\sin(\beta+\phi)\leqq1$

よって、$\beta+\phi=\dfrac{\pi}{2}$ のとき、最大値 39 をとる。

つまり、$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\phi$ より

$$\begin{cases}\sin\beta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\cos\phi=\dfrac{5}{13}\\ \cos\beta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\sin\phi=\dfrac{12}{13}\end{cases}$$

のとき、$39\sin(\beta+\phi)\leqq39$ の等号が成立し、最大値 39 をとる。

このとき、① より、$6\sin\alpha\sqrt{\dfrac{12}{13}}=\cos\alpha\sqrt{15\cdot\dfrac{5}{13}}$

$\cos\alpha \neq 0$ より、$\tan\alpha=\dfrac{5}{12}$

以上より、$\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\dfrac{12}{13}\\ \pm\dfrac{5}{13}\end{pmatrix}$（複号同順）、$\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{12}{13}\\ \dfrac{5}{13}\end{pmatrix}$ のとき

すべての等号が成立するので、最大値 39 をとる。

(3)　$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=\displaystyle\int_m^{m+1}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

また、$f(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ とおくと、$y=f(x)$ は単調減少で、$f(64)=\dfrac{1}{48}$ より

$m=63$ とすると

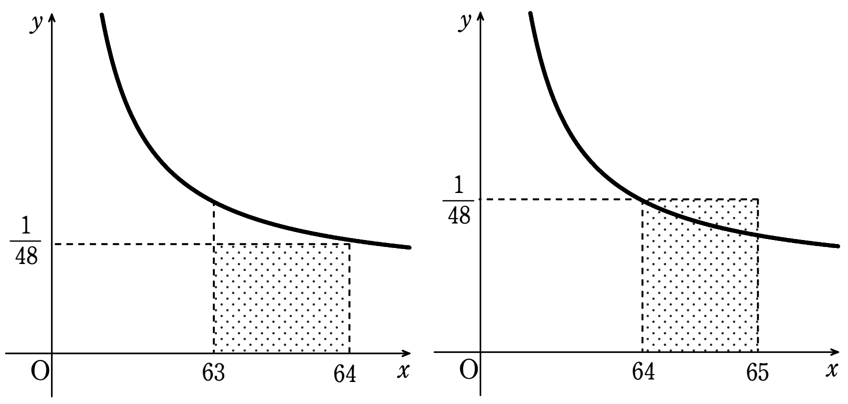
$$\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{63}=\int_{63}^{64}f(x)dx>\int_{63}^{64}\frac{1}{48}dx=\frac{1}{48}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$m=64$ とすると

$$\sqrt[3]{65}-\sqrt[3]{64}=\int_{64}^{65}f(x)dx<\int_{64}^{65}\frac{1}{48}dx=\frac{1}{48}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

よって、$m=64$ となる。

※：定積分より、面積を考える。左辺がグラフと $x$ 軸、$x=m$、$m+1$ で囲まれている部分の面積で、右辺が底辺が１、高さが $\dfrac{1}{48}$ の長方形の面積を表す。
（①が左図、②が右図）




$y=f(x)$ が単調減少より、面積も $m$ の増加に伴い単調減少する。
①、②より、$m=64$ で初めて $\dfrac{1}{48}$ より小さくなったので、$m=64$ が答えとなる。

別解　$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ とおくと、$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

$m<x<m+1$ において、$f(x)$ は微分可能より
平均値の定理から

$$\frac{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}}{(m+1)-m}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{c^2}}\quad(m<c<m+1)$$

を満たす実数 $c$ が少なくとも１つ存在する。

よって、$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{c^2}}$ ……③　より、$\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{c^2}}<\dfrac{1}{48}$……④

また、$f'(x)$ は単調減少するので、$m<c<m+1$ より

$$\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(m+1)^2}}<\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{c^2}}<\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{m^2}}\cdots\cdots\text{⑤}$$

④、⑤が同時に成り立つとき

よって、$\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(m+1)^2}}<\dfrac{1}{48}$

$\therefore\ \sqrt[3]{(m+1)^2}>16$

$\therefore\ m+1>16^{\frac{3}{2}}=64$

$\therefore\ m>63$

ゆえに、これを満たす最小の自然数 $m$ は、$m=64$
逆にこのとき、③、⑤より

$$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{c^2}}<\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{48}$$

$\therefore\ \sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\dfrac{1}{48}$

となり、確かに成立する。
よって、求める整数 $n$ の最小値は、$m=64$

別解　$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=\dfrac{(\sqrt[3]{m+1})^3-(\sqrt[3]{m})^3}{(\sqrt[3]{m+1})^2+\sqrt[3]{m+1}\cdot\sqrt[3]{m}+(\sqrt[3]{m})^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}}$$

よって、$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\dfrac{1}{48}$　より

$$48<\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{m(m+1)}+\sqrt[3]{m^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑤}$$
$$<\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{(m+1)^2}+\sqrt[3]{(m+1)^2}$$

$\therefore\ 48<3\cdot\sqrt[3]{(m+1)^2}$

$\therefore\ 16<(m+1)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore\ m+1>16^{\frac{3}{2}}=64$

$\therefore\ m>63$

よって、⑤が成立するためには $m>63$ が必要。
$m=64$ のとき

$$\text{⑤の右辺}=\sqrt[3]{65^2}+\sqrt[3]{65\cdot 64}+\sqrt[3]{64^2}$$
$$>\sqrt[3]{64^2}+\sqrt[3]{64^2}+\sqrt[3]{64^2}$$
$$=16+16+16=48$$

よって、⑤が成り立つので、$m$ の最小値は 64

(4)　$(\sqrt[3]{n+1})^4-(\sqrt[3]{n})^4=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}}dx$

また、$f(x)=\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{3}}$ とおくと、$y=f(x)$ は単調増加で、$f(27000)=40$ より

$n=26999$ とすると

$$(\sqrt[3]{27000})^4-(\sqrt[3]{26999})^4=\int_{26999}^{27000}f(x)dx<\int_{26999}^{27000}40dx=40$$

$n=27000$ とすると

$$(\sqrt[3]{27001})^4-(\sqrt[3]{27000})^4=\int_{27000}^{27001}f(x)dx>\int_{27000}^{27001}40dx=40$$

よって、$n=27000$

別解　$f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ とおくと、$f'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

$n<x<n+1$ において、$f(x)$ は微分可能より
平均値の定理から

$$\frac{(n+1)^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}}{(n+1)-n}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\quad(n<c<n+1)$$

を満たす実数 $c$ が少なくとも１つ存在する。

よって、$(n+1)^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ ……③　より、$\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}>40$ ……④

また、$f'(x)$ は単調増加をするので、$n<c<n+1$ より

$$\frac{4}{3}n^{\frac{1}{3}}<\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}<\frac{4}{3}(n+1)^{\frac{4}{3}}\cdots\cdots\text{⑤}$$

④、⑤が同時に成り立つとき

よって、$\dfrac{4}{3}(n+1)^{\frac{1}{3}}>40$

$\therefore\ (n+1)^{\frac{1}{3}}>30$

$\therefore\ n+1>27000$

$\therefore\ n>26999$

ゆえに、これを満たす最小の自然数 $n$ は、$n=27000$
逆にこのとき、③、⑤より

$$(n+1)^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}>\frac{4}{3}(27000)^{\frac{1}{3}}=40$$

となり、確かに成立する。
よって、求める整数 $n$ の最小値は、$n=27000$

**2** 第 1 象限での曲線

$$C: x^4 + y^2 = 25 \quad (x>0 \text{ かつ } y>0)$$

と $x$ 軸と $y$ 軸に囲まれた図形を $F$ とする。

(1) 曲線 $C$ 上の点 $(2, 3)$ における接線の $y$ 切片を $b$ とすると

$$b = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$$

である。

(2) 図形 $F$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V$ とすると

$$V = \boxed{エオ}\sqrt{\boxed{カ}}\,\pi$$

である。

(3) 図形 $F$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $W$ とすると

$$W = \frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}\pi^2$$

である。

解説

(1) 両辺を $x$ を微分すると

$$4x^3 + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{y} \quad \cdots\cdots ①$$

よって、$(2, 3)$ における接線は

$$y = -\frac{2\cdot 2^3}{3}(x-2)+3$$

$$\therefore\quad y = -\frac{16}{3}x + \frac{41}{3}$$

よって、$b = \dfrac{41}{3}$

(2) $x^4 + y^2 = 25 \quad (x>0 \text{ かつ } y>0)$ より

$y^2 = 25 - x^4 > 0$

$\therefore\quad (\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)(5+x^2) > 0$

$\therefore\quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

$x>0$ より、$0<x<\sqrt{5}$

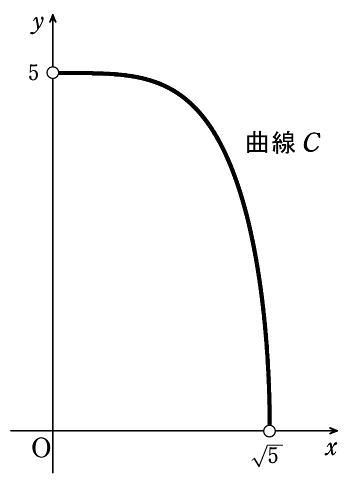
また、$x^4 = 25 - y^2 > 0$

$\therefore\quad (5-y)(5+y) > 0$

$\therefore\quad -5 < y < 5$

$y>0$ より、$0<y<5$

①、$x>0$、$y>0$ より、接線の傾きは常に負となるので、グラフは以下のようになる。




よって、求める体積 $V$ は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\sqrt{5}} y^2 dx \\
&= \pi\int_0^{\sqrt{5}} (25 - x^4) dx \\
&= \pi\left[25x - \frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{5}} \\
&= \pi\left\{25\cdot\sqrt{5} - \frac{1}{5}\cdot(\sqrt{5})^5\right\} \\
&= 20\sqrt{5}\,\pi
\end{aligned}$$

参考　グラフに関して

$x^4 + y^2 = 25$ より

$y = \sqrt{25 - x^4} \quad (0<x<\sqrt{5}、0<y<5)$

よって、$y' = \dfrac{-2x^3}{\sqrt{25-x^4}} < 0$ より

$0<x<\sqrt{5}$ で単調減少となる。

(3) 求める体積 $W$ は

$$\begin{aligned}
W &= \pi\int_0^5 x^2 dy \\
&= \pi\int_0^5 \sqrt{25-y^2}\, dy \\
&= \pi\cdot\frac{25}{4}\pi \\
&= \frac{25}{4}\pi^2
\end{aligned}$$

**3** 関数

$$f(x)=\sqrt{9+\frac{19}{9}\sin x}$$

の積分により 二つの関数

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt、と\ S(x)=\int_0^x f(x+t)dt$$

を定める。

　このとき、すべての実数 $a$ について、$x=a$ における微分係数 $F'(a)$ と $S'(a)$ は正の実数である。たとえば

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\ であり、S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$$

である。したがって、$S(x)$ の逆関数 $g(x)=S^{-1}(x)$ が存在する。

　この関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ について

$$g'(0)=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}、\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{\boxed{クケコ}}{\boxed{サシス}}$$

である。

解説

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ より

$$F'(x)=f(x)$$

よって、$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\sqrt{9+\frac{19}{9}\cdot1}$$

$$=\frac{10}{3}$$

$S(x)=\int_0^x f(x+t)dt$ より

$x+t=u$ とおくと、$dt=du$

$t:0\to x$ のとき、$u:x\to\ 2x$　となるので

$$S(x)=\int_x^{2x}f(u)du$$

よって、$S'(x)=2\cdot f(2x)-f(x)$　より

$$S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\cdot3-\frac{10}{3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

$y=S(x)$ の $x$ と $y$ を入れ替えると、$x=S(y)$

これを $y$ で微分すると

$$\frac{dx}{dy}=S'(y)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{S'(y)}$$

$$\therefore\quad g'(x)=\frac{1}{S'(y)}\quad\cdots\cdots①$$

ここで、$y=S(x)$ と $y=g(x)$ は $y=x$ に関して対称で、$y=S(x)$ は $S(0)=0$ より、

$x=0$ のとき、$y=0$ となるので 、$y=g(x)$ も$x=0$ のとき、$y=0$ となる。

よって、① に $(x、y)=(0、0)$ を代入して

$$g(0)=\frac{1}{S'(0)}$$

$$=\frac{1}{2f(2\cdot0)-f(0)}$$

$$=\frac{1}{f(0)}$$

$$=\frac{1}{3}$$

また、$\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=g''(0)$ より

① を $x$ で微分して

$$g''(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{S'(y)}\right\}$$

$$=\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{S'(y)}\right\}\times\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{-S''(y)}{\{S'(y)\}^2}\times\frac{1}{S'(y)}$$

$$=\frac{-S''(y)}{\{S'(y)\}^3}$$

$$=-\frac{4f'(2x)-f'(x)}{\{2f(2x)-f(x)\}^3}$$

$(x、y)=(0、0)$ を代入して

$$g''(0)=-\frac{3f'(0)}{\{f(0)\}^3}$$

ここで、$f'(x)=\dfrac{\frac{19}{9}\cos x}{2\sqrt{9+\frac{19}{9}\sin x}}$ より、$f'(0)=\dfrac{19}{54}$

よって　　$g''(0)=-\dfrac{3f'(0)}{\{f(0)\}^3}$

$$=-\frac{3\cdot\frac{19}{54}}{3^3}$$

$$=\frac{-19}{486}$$

**4** ある試行の結果起こる三つの事象 $A$ と $B$ と $C$ について考える。
事象 $A\cup B\cup C$ は全事象であり、それぞれの確率が

$$P(A)=\frac{5}{8}、P(B)=\frac{3}{8}、P(C)=\frac{5}{16}$$

であるとする。さらに事象 $A\cap B$ と $C$ は互いに排反であり、$B$ が起こったときこの $A$ と $C$ のそれぞれが起こる条件つき確率が

$$P_B(A)=\frac{5}{8}、P_B(C)=\frac{1}{12}$$

であるとする。

(1)　事象 $A\cap B$ の確率は $P(A\cap B)=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ であり、$A$ が起こったときの $B$ の起こる条件つき確率は $P_A(B)=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

(2)　事象 $B\cup C$ の確率は $P(B\cup C)=\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコ}}$ であり、$\overline{C}$ が起こったときの $B$ が起こる条件つき確率は $P_{\overline{C}}(B)=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(3)　事象 $A\cap C$ の確率は $P(A\cap C)=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ であり、$C$ が起こったときの $A\cup B$ の起こる条件つき確率は $P_C(A\cup B)=\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。

解説

(1)　$P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ より

$$P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{64}$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{64}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{8}$$

(2)　$P_B(C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(B)}$ より

$$P(B\cap C)=P_B(C)\times P(B)=\frac{1}{12}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{32}$$

よって、$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$

$$=\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{1}{32}=\frac{21}{32}$$

また、$P(\overline{C})=1-P(C)$

$$=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

$$P(\overline{C}\cap B)=P(B)-P(B\cap C)=\frac{3}{8}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$$

よって、$P_{\overline{C}}(B)=\dfrac{P(\overline{C}\cap B)}{P(\overline{C})}$

$$=\frac{\frac{11}{32}}{\frac{11}{16}}=\frac{1}{2}$$

(3)　$A\cup B\cup C$ が全事象より、$P(A\cap B\cap C)=1$
$A\cap B$ と $C$ が排反より、$P(A\cap B\cap C)=0$　より

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-\{P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)-P(A\cap B\cap C)\}$$ から

$$1=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\left\{\frac{15}{64}+\frac{1}{32}+P(C\cap A)-0\right\}$$

$$\therefore\quad P(A\cap C)=\frac{3}{64}$$

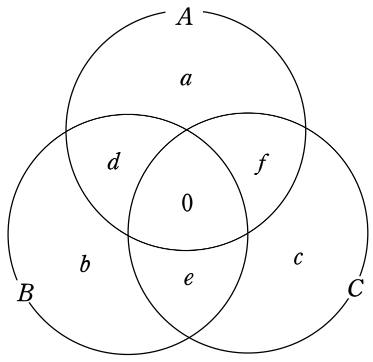
よって、$P(C\cap(A\cup B))=P(C\cap B)+P(C\cap B)$

$$=\frac{1}{32}+\frac{3}{64}=\frac{5}{64}$$

これより、$P_C(A\cup B)=\dfrac{P(C\cap(A\cup B))}{P(C)}$

$$=\frac{\frac{5}{64}}{\frac{5}{16}}=\frac{1}{4}$$

別解　$A\cup B\cup C$ が全事象より、$P(A\cap B\cap C)=1$
$A\cap B$ と $C$ が排反より、$P(A\cap B\cap C)=0$ より、以下のように設定をする。




(1)　$P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{64}=d$$

$$=\frac{15}{64}=d$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{64}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{8}$$

(2)　$P(B\cap C)=P_B(C)\times P(B)$

$$=\frac{1}{12}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{32}=e$$

$\left(これより、b=P(B)-(d+e)=\dfrac{7}{64}\right)$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{1}{32}=\frac{21}{32}=b+c+d+e+f$$

$\left(これより、a=1-(b+c+d+e+f)=\dfrac{11}{32} となるので、f=P(A)-(a+d)=\dfrac{3}{64}\right)$

$$P_{\overline{c}}(B)=\frac{P(\overline{C}\cap B)}{P(\overline{C})}=\frac{b+d}{1-P(C)}=\frac{\frac{7}{64}+\frac{15}{64}}{1-\frac{5}{16}}=\frac{1}{2}$$

(3)　$P(A\cap C)=f=\dfrac{3}{64}$

$$P_C(A\cup B)=\frac{P(C\cap(A\cup B))}{P(C)}=\frac{e+f}{P(C)}=\frac{\frac{1}{32}+\frac{3}{64}}{\frac{5}{16}}=\frac{1}{4}$$