◇２０２０年　昭和大学医学部 Ⅱ期

1 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　xyz 空間において、原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$、および S 上の点A$(0、0、1)$ を考える。S 上の A と異なる点 P$(x_0、y_0、z_0)$ に対して、2 点 A、P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1−1)　$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AP}$（$t$ は実数）とおくとき、$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OA}$ および t を用いて表せ。

(1−2)　$\overrightarrow{OQ}$ の成分表示を x_0、y_0、z_0 を用いて表せ。

(1−3)　球面 S と平面 $x=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき、xy 平面における点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　xy 平面において、点A$(a、0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし、$0<r\leqq a$ とする。円 C の周上に、y 座標が正である点 P と、点E$(a+r、0)$ をとる。さらに、点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q、2 点 E、P を通る直線と y 軸との交点を R、∠AEP を θ とする。このとき、3 点P、Q、R を頂点とする△PQR について、次の問いに答えよ。

(2−1)　QP : QR の比を求めよ。また、△PQR が正三角形となる場合の θ を求めよ。

(2−2)　△PQR が正三角形となり、さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の、a と r の関係式を求めよ。

解説

(1)

(1−1)　$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AP}$ より

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OQ}$$

(1−2)　Q を $(x、y、z)$ とすると

(1) より

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}tx_0\\ty_0\\1-t+tz_0\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\text{①}$$

Q は xy 平面より、$z=0$

よって、$1-t+tz_0=0$

$\therefore\ (1-z_0)t=1$

A と P は異なる点より、$z_0\fallingdotseq 1$

よって、$t=\dfrac{1}{1-z_0}$

① より、Q の座標は、$\left(\dfrac{x_0}{1-z_0}、\dfrac{y_0}{1-z_0}、0\right)$

(1−3)　図形 C は、球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ と $x=\dfrac{1}{2}$ の交線より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=1$$

$$\therefore\ y^2+z^2=\frac{3}{4}、x=\frac{1}{2}$$

P は図形 C 上より

$$y_0{}^2+z_0{}^2=\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\text{②}、x_0=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\text{③}$$

(1−2) より、Q$(x、y、0)$ は

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_0}{1-z_0}=\dfrac{1}{2(1-z_0)}\ \ (\because\ \text{③})\ \cdots\cdots\text{④}\\[2ex] y=\dfrac{y_0}{1-z_0}\ \cdots\cdots\text{⑤}\end{cases}$$

となる。

④ より、$x\fallingdotseq 0$ から

$$1-z_0=\frac{1}{2x}$$

$$\therefore\ z_0=1-\frac{1}{2x}\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

$\dfrac{\text{⑤}}{\text{④}}$ より

$$\frac{y}{x}=2y_0$$

$$\therefore\ y_0=\frac{y}{2x}\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

⑥、⑦ を ② に代入して

$$\left(\frac{y}{2x}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2x}\right)^2=\frac{3}{4}$$

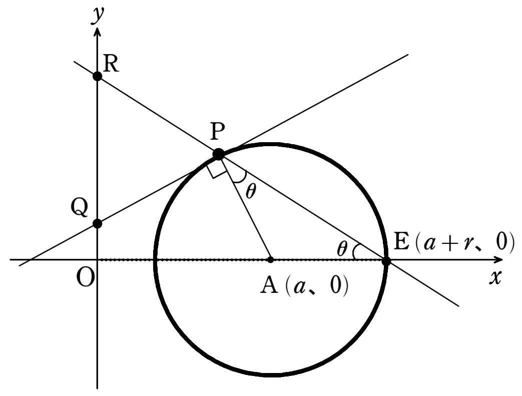
$$\therefore\ y^2+(2x-1)^2=3x^2$$

$$\therefore\ (x-2)^2+y^2=3$$

よって、Q の軌跡は

$$(x-2)^2+y^2=3、z=0$$

(2)



(2−1)　△APE は二等辺三角形より

∠AEP＝∠EPA＝$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

よって、∠QPR＝π−∠EPQ

$$=\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\theta$$

また、△OER は直角三角形より

$$\angle\text{ORE}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

よって、∠QPR＝∠ORE より

△PQR は二等辺三角形となるので、QP＝QR

よって、QP : QR＝1 : 1

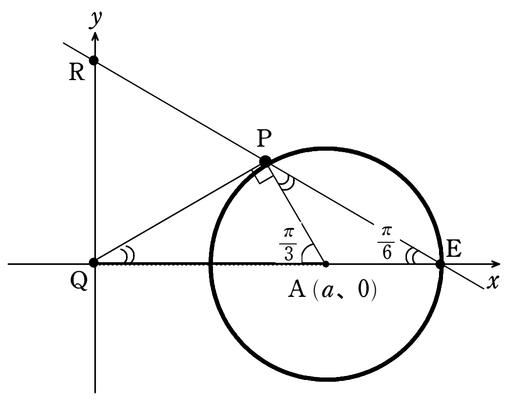
△PQR が正三角形となるとき、∠QPR＝∠ORE＝$\dfrac{\pi}{3}$

よって、$\dfrac{\pi}{2}-\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

(2−2)　点 P、R の y 座標は正より、原点と一致する点を Q となる。

このとき図は以下のようになる。



△APQ より、AQ : AP＝2 : 1

$\therefore\ a : r=2 : 1$

$\therefore\ a=2r$

別解

(2−1)　直線 EP の方程式は

$$y=\tan(\pi-\theta)\{x-(a+r)\}$$

$$\therefore\ y=-\tan\theta\{x-(a+r)\}$$

$x=0$ のとき、$y=(a+r)\tan\theta$ より、R の座標は、$(0、(a+r)\tan\theta)$

また、∠PAE＝$\pi-2\theta$ より

P の座標は、$(a+r\cos(\pi-2\theta)、r\sin(\pi-2\theta))=(a-r\cos2\theta、r\sin2\theta)$

よって、円 $C:(x-a)^2+y^2=r^2$ の P における接線は

$$\{(a-r\cos2\theta)-a\}(x-a)+y\cdot r\sin2\theta=r^2$$

$$\therefore\ -(x-a)\cdot\cos2\theta+y\cdot\sin2\theta=r\ \cdots\cdots\text{①}$$

$x=0$ のとき、$y\cdot\sin2\theta=r-a\cos2\theta$

$0<2\theta<\pi$ より、$\sin2\theta\fallingdotseq 0$ から、$y=\dfrac{r}{\sin2\theta}-\dfrac{a}{\tan2\theta}$

よって、Q の座標は、$\left(0、\dfrac{r}{\sin2\theta}-\dfrac{a}{\tan2\theta}\right)$

これより

$$\text{QR}=(a+r)\tan\theta-\frac{r}{\sin2\theta}+\frac{a}{\tan2\theta}$$

$$=a\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan2\theta}\right)+r\left(\tan\theta-\frac{1}{\sin2\theta}\right)$$

$$=a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\right)+r\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin2\theta}\right)$$

$$=a\left(\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}\right)+r\left(\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}-\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$=a\cdot\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}-r\cdot\frac{1-2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=a\cdot\frac{1}{\sin2\theta}-r\cdot\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}$$

$$=\frac{a-r\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

また、直線 QP の傾きは ① より、$\dfrac{1}{\tan 2\theta}$

よって、$\mathrm{QP}=\sqrt{1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}}\cdot(a-r\cos 2\theta)$　……(※)

$$=\frac{a-r\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\mathrm{QR}$$

これより、QP : QR＝1 : 1　(以下略)

$\boxed{\text{参考}}$　(※) について

$y=mx+n$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ mp+n)$、$\mathrm{Q}(q,\ mq+n)$ 間の距離は

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(p-q)^2+\{(mp+n)-(mq+n)\}^2}$$
$$=\sqrt{(p-q)^2+\{m(p-q)\}^2}$$
$$=\sqrt{1+m^2}\,|p-q|$$

となる。

(2−2)　点 P、R の y 座標は正より、原点と一致する点を Q となる。

よって、(2−1) より

$$\frac{r}{\sin\frac{\pi}{3}}-\frac{a}{\tan\frac{\pi}{3}}=0$$

$$\therefore\ \frac{2r}{\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}}=0$$

$$\therefore\ a=2r$$

2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　方程式 $4x^4-8x^3+11x^2-8x+4=0$ を解け。

(2)　$x^{2020}+x+1$ をx^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ。

(3)　3 次方程式 $x^3-x^2-x-1=0$ の 3 つの解を α、β、γ とする。

$\dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}$、$\dfrac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}$、$\dfrac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}$ を解とする 3 次方程式を求めよ。

ただし、x^3 の係数は 1 とする。、

(解説)

(1)　$4x^4-8x^3+11x^2-8x+4=0$ ……… ①

① は $x=0$ を解にもたないので

$$4x^2-8x+11-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}=0$$

$$\therefore\ 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=8$$

$$\therefore\ 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと

$$4t^2-8t+3=0$$

$$\therefore\ (2t-3)(2t-1)=0$$

$$\therefore\ t=\frac{3}{2}、\frac{1}{2}$$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 2x^2-3x+2=0$$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{7}\,i}{4}$$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 2x^2-x+2=0$$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$$

よって、① の解は、$x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}\,i}{4}$、$\dfrac{1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

(2)　$x^{2020}+x+1$ をx^2+x+1 で割ったときの商を$Q(x)$、余りを $ax+b$ (a、b は実数)とおくと

$$x^{2020}+x+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b\ \text{………①}$$

ここで、$x^3-1=0$ の虚数解の一つを w とすると、$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ より

w は、$w^3=1$、$w^2+w+1=0$ ……… ② を満たす。

① に $x=w$ を代入して

$$w^{2020}+w+1=(w^2+w+1)Q(x)+aw+b$$

$$\therefore\ w\cdot(w^3)^{673}+w+1=aw+b$$

$$\therefore\ 2w+1=aw+b\quad(\because\ ②)$$

a、b は実数で、w は虚数より

$$a=2、b=1$$

よって、余りは $2x+1$

(3)　$x^3-x^2-x-1=0$………① の解が $x=\alpha$、β、γ より

$$x^3-x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \text{………②}$$

と因数分解ができる。

② に $x=2$ を代入して

$$2^3-2^2-2-1=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$$

$$\therefore\ (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=1$$

$2-\alpha\fallingdotseq 0$、$2-\beta\fallingdotseq 0$、$2-\gamma\fallingdotseq 0$ より

$$2-\alpha=\frac{1}{(2-\beta)(2-\gamma)}、2-\beta=\frac{1}{(2-\gamma)(2-\alpha)}、2-\gamma=\frac{1}{(2-\alpha)(2-\beta)}$$

となるので、$x=2-\alpha$、$2-\beta$、$2-\gamma$ を解にもつ、x^3 の係数が 1 である3 次方程式を考える。……… ③

① より解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=1、\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1、\alpha\beta\gamma=1\ \text{………④}$$

また

$$\begin{aligned}(2-\alpha)+(2-\beta)+(2-\gamma)&=6-(\alpha+\beta+\gamma)\\&=6-1\quad(\because\ ④)\\&=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2-\alpha)(2-\beta)+(2-\beta)(2-\gamma)+(2-\gamma)(2-\alpha)\\&=4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta+4-2(\beta+\gamma)+\beta\gamma+4-2(\gamma+\alpha)+\gamma\alpha\\&=12-4(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\\&=12-4\cdot1+(-1)\quad(\because\ ④)\\&=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)&=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\\&=8-4\cdot1+2(-1)-1\quad(\because\ ④)\\&=1\end{aligned}$$

よって、解と係数の関係より、求める方程式 ③ は

$$x^3-5x^2+7x-1=0$$

別解　③ の続きから

$x=2-X$ とおくと ($X=\alpha$、β、γ)

$\therefore\ X=2-x$

X は ① の解より

$$(2-x)^3-(2-x)^2-(2-x)-1=0$$

$$\therefore\ x^3-5x^2+7x-1=0$$

別解　$x^3-x^2-x-1=0$ の解が $x=\alpha$、β、γ より

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=1、\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1、\alpha\beta\gamma=1\ \text{………}(A)$$

ここで、
$$\begin{aligned}(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)&=\alpha\beta\gamma+4(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-8\\&=1+4\cdot1-2\cdot(-1)-8\quad(\because\ (A))\\&=-1\quad\text{………}(B)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}+\frac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}\\&=\frac{(\alpha-2)+(\beta-2)+(\gamma-2)}{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)}\\&=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-6}{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)}\\&=\frac{1-6}{-1}\quad(\because\ (A)、(B))\\&=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cdot\frac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}+\frac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}\cdot\frac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}\\&\qquad+\frac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}\cdot\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}\\&=\frac{(\alpha-2)(\gamma-2)+(\alpha-2)(\beta-2)+(\beta-2)(\gamma-2)}{\{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)\}^2}\\&=\frac{12-4(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)\}^2}\\&=\frac{12-4\cdot1+(-1)}{(-1)^2}\quad(\because\ (A)、(B))\\&=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cdot\frac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}\cdot\frac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}\\&=\frac{1}{\{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)\}^2}\\&=\frac{1}{(-1)^2}\quad(\because\ (A)、(B))\\&=1\end{aligned}$$

よって、$\dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}$、$\dfrac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}$、$\dfrac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}$ を解とするx^3 の係数が 1 である 3 次方程式は、解と係数の関係より

$$x^3-5x^2+7x-1=0$$

3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{11}{16}$ $(90°<\theta<180°)$

のとき、$\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) 座標平面上に２点 A$(-2、0)$、B$(2、0)$ がある。円 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 上に点 P をとって、$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ を最小にするような点 P の座標を求めよ。

(3) 1 から 55 までの整数のどれかを 1 つを同じ大きさのカードに書いて、1 を書いたカードを 1 枚、2 を書いたカードを 2 枚、以下同様に 55 を書いたカードを 55 枚作り、これらを箱に入れる。箱の中をよく混ぜてから 1 枚のカードを取り出し、それに書いてある数を X とする。

(3−1) $X=28$ となる確率を求めよ。

(3−2) X の期待値（平均値）を求めよ。

解説

(1) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{11}{16}$ より

$(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{11}{16}$ ………①

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと

合成して、$t=\sqrt{2}\sin(x+45°)$

$90°<\theta<180°$ より、$135°<\theta+45°<225°$

よって、$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin(x+45°)<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ -1<t<1$

また、２乗して

$t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$\therefore\ t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ ………②

よって、① より

$t^3-3\cdot\dfrac{t^2-1}{2}\cdot t=\dfrac{11}{16}$

$\therefore\ 16t^3-24(t^3-t)=11$

$\therefore\ 8t^3-24t+11=0$

$\therefore\ (2t-1)(4t^2+2t-11)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}、\dfrac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}$

$-1<t<1$ より、$t=\dfrac{1}{2}$

よって、$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$、② より、$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$ より

$\sin\theta$、$\cos\theta$ は２次方程式 $u^2-\dfrac{1}{2}u-\dfrac{3}{8}=0$ の解である。

よって、$8u^2-4u-3=0$

$\therefore\ u=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

$90°<\theta<180°$ より、$\sin\theta>0$、$\cos\theta<0$

よって、$\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$、$\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$

(2) P は、$(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 上に点より

$x=4+2\cos\theta$、$y=3+2\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2&=\{(-2)-(4+2\cos\theta)\}^2+(3+2\sin\theta)^2\\&\quad+\{2-(4+2\cos\theta)\}^2+(3+2\sin\theta)^2\\&=(-6-2\cos\theta)^2+(3+2\sin\theta)^2+(-2-2\cos\theta)^2+(3+2\sin\theta)^2\\&=36+24\cos\theta+4\cos^2\theta+9+12\sin\theta+4\sin^2\theta\\&\quad+4+8\cos\theta+4\cos^2\theta+9+12\sin\theta+4\sin^2\theta\\&=24\sin\theta+32\cos\theta+66\\&=8(3\sin\theta+4\cos\theta)+66\\&=40\sin(\theta+\alpha)+66\end{aligned}$$

（ただし、α は $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$、$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ を満たす鋭角である。）

$0\leqq\theta<2\pi$ より、$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$

よって、$\sin(\theta+\alpha)=-1$ のとき

つまり、$\theta+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$

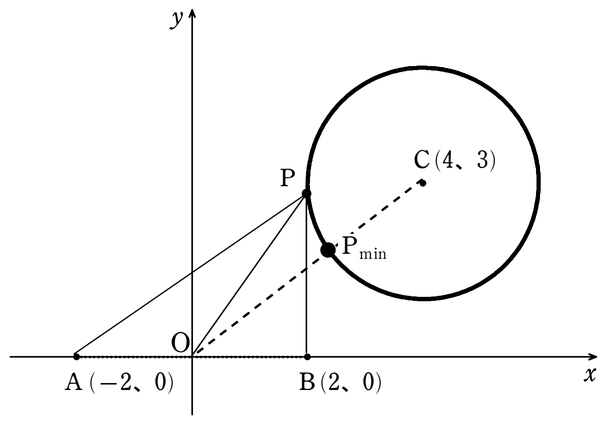
$\therefore\ \theta=\dfrac{3}{2}\pi-\alpha$ のとき

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ は最小値 をとる。（最小値は 26）

このとき、P の座標は

$$\begin{aligned}&\left(4+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)、3+2\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)\\&=(4+2(-\sin\alpha)、3+2\cdot(-\cos\alpha))\\&=\left(4+2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)、3+2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right)\\&=\left(\frac{12}{5}、\frac{9}{5}\right)\end{aligned}$$

別解



$(4、3)$ を C とする。

中線定理より

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2(\mathrm{OP}^2+\mathrm{OA}^2)$

$=2(\mathrm{OP}^2+4)$

ここで OP について

$\mathrm{OP}+\mathrm{PC}\geqq\mathrm{OC}$ より

$\mathrm{OP}\geqq\mathrm{OC}-\mathrm{PC}=\mathrm{OC}-2=5-2=3$

となる。

よって、O、P、C がこの順で一直線上に並ぶとき OP は最小となる。

このとき、OP : PC＝3 : 2 で

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=\left(\dfrac{12}{5}、\dfrac{9}{5}\right)$

よって、最小とをとるときの P の座標は、$\left(\dfrac{12}{5}、\dfrac{9}{5}\right)$

(3)

(3−1) カードの総数は、$\displaystyle\sum_{k=1}^{55}k=\frac{1}{2}\cdot55\cdot56=55\cdot28$

よって、求める確率は

$\dfrac{28}{55\cdot28}=\dfrac{1}{55}$

(3−2) $X=k(k=1、2、……、55)$ となる確率は

$\dfrac{k}{55\cdot28}$

よって、求める期待値は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{55}k\cdot\frac{k}{55\cdot28}&=\frac{1}{55}\sum_{k=1}^{55}k^2\\&=\frac{1}{55\cdot28}\cdot\frac{1}{6}\cdot55\cdot56\cdot111\\&=\frac{111}{3}\\&=37\end{aligned}$$

4 次の各問いに答えよ。ただし、(1)、(2) は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos x}$ を求めよ。

(2) 半径 3 の球に内接する直円柱の体積の最大値を求めよ。

(3) xy 平面上で $x\geqq 0$、$y\leqq 0$ のとき

$$\int_y^x (1-|t|)dt\geqq 0$$

を満たす点 $(x、y)$ の存在する部分を図示せよ。

(解説)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x\cdot(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x\cdot(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

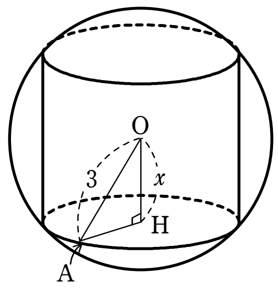
$\displaystyle=\lim_{x\to 0}5^2\cdot\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)$

$=25\cdot 1\cdot 1\cdot 2$

$=50$

(2) 右図のように点をとる。

ただし，O は球の中心である。



$\mathrm{OH}=x$ とおくと $(0<x<3)$

$\mathrm{AH}=\sqrt{3^2-x^2}$

直円柱の体積を V とすると

$V=\pi\mathrm{AH}^2\times 2\mathrm{OH}$

$=\pi(9-x^2)\cdot 2x$

$=\pi(-2x^3+18x)$

よって、$V'=\pi(-6x^2+18)$

$=-6\pi(x^2-3)$　より

増減表は、以下ののようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	$12\sqrt{3}\pi$	↘	

よって、$x=\sqrt{3}$ のとき最大値 $12\sqrt{3}\pi$

(3) $x\geqq 0$、$y\leqq 0$ より、$y\leqq 0\leqq x$

ここで、$\displaystyle\int_y^x(1-|t|)dt=\int_y^0\{1-(-t)\}dt+\int_0^x(1-t)dt$

$\displaystyle=\int_y^0(1+t)dt+\int_0^x(1-t)dt$

$\displaystyle=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_y^0+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x$

$\displaystyle=-y-\frac{y^2}{2}+x-\frac{x^2}{2}$

よって、$\displaystyle\int_y^x(1-|t|)dt\geqq 0$ より

$\displaystyle -y-\frac{y^2}{2}+x-\frac{x^2}{2}\geqq 0$

$\therefore$　$x^2+y^2-2x+2y\leqq 0$

$\therefore$　$(x-1)^2+(y+1)^2\leqq 2$

これより、求める領域は、以下のようになる（ただし、境界線は含む。）