1 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

座標平面において、原点をOとする。座標平面上の点A$(x,\ y)$を複素数A(z)(ただし、$z=x+yi$)に移す操作をXとする。また、複素数A(z')(ただし、$z'=x'+y'i$)を座標平面上のA$'(x',\ y')$に移す操作をYとする。

(1) 座標平面上の原点、および2点B$\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}、\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$、C$(\sqrt{6}-\sqrt{2}、\sqrt{6}+\sqrt{2})$からなる三角形を△OBCとする。$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$がなす角をラジアン単位で求めよ。また、△OBCの面積を求めよ。

(2) BCの中点をMとする。操作XによってB、C、Mから複素数β、γ、μが得られたとき、β、γ、μを複素数平面の原点周りに$-\dfrac{\pi}{4}$回転させて得られる複素数β'、γ'、μ'を求めよ。

(3) β'、γ'、μ'を操作Yによって座標平面に移した点をB$'$、C$'$、M$'$とする。x軸とOM$'$がなす小さい方の角をθとするとき、$\sin\theta$と$\cos\theta$の値をそれぞれ求めよ。

(4) 操作XとYを組み合わせて△OBCを原点Oまわりに回転させるとする。△OBCの面積がy軸で二等分されるとき、Bに対応する点をB$''$、Cに対応する点をC$''$とした場合、B$''$C$''$を通る直線の方程式を求めよ。

(解説)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}、\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)=\left(2\cos\dfrac{\pi}{12}、2\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{6}-\sqrt{2}、\sqrt{6}+\sqrt{2})=\left(4\cos\dfrac{5}{12}\pi、4\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$より

$$\angle\mathrm{BOC}=\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

また、OB$=2$、OC$=4$より

$$\triangle\mathrm{OBC}の面積=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

参考　$\sin15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$、$\cos15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$は暗記事項。

別解　直線OBの傾きは、

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}=2-\sqrt{3}$$

直線OCの傾きは、$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}=2+\sqrt{3}$

よって、直線OB、直線OCとx軸の正方向とのなす角をそれぞれα、βとすると

$$\tan\angle\mathrm{BOC}=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}=\frac{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt{3}$$

$\angle\mathrm{BOC}$は鋭角より、$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$

別解　βを原点のまわりに回転した点がγより

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i}$$
$$=2\cdot\frac{\{(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i\}\cdot\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}$$
$$=2\cdot\frac{8+8\sqrt{3}i}{16}=2\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって、$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$

別解　$\triangle\mathrm{OBC}の面積=\dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right|=2\sqrt{3}$

(2) β、γを原点周りに$-\dfrac{\pi}{4}$回転させて得られる複素数β'、γ'より

$$\beta'=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\sqrt{3}-i$$

$$\gamma'=4\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=2\sqrt{3}+2i$$

$$\mu'=\frac{\beta'+\gamma'}{2}=\frac{(\sqrt{3}-i)+(2\sqrt{3}+2i)}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

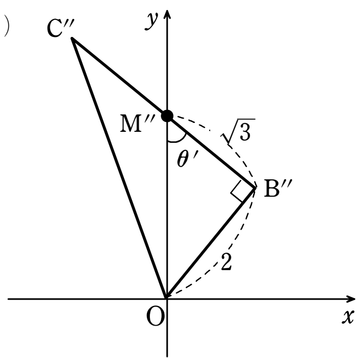
(3) 直線OMの傾きは、$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$より、$\tan\theta=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

よって、$\sin\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$、$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

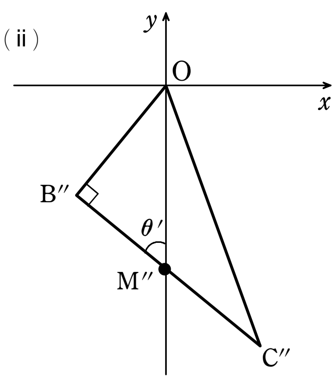
(4) △OBCはOB$=2$、OC$=4$、$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$より、$\angle\mathrm{OBC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角三角形となるので、Oを通る直線が△OBCの面積を二等分するのは、直線がBCの中点を通るときである。

よって、B$''$、C$''$の中点をM$''$とすると、M$''$がy軸上にくるのは以下の場合である。

(ｉ)



(ⅱ)



$\angle\mathrm{OM''B''}=\theta'$とおくと、図より

$\tan\theta'=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$、OM$''=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$　……(※)

(ｉ)のとき

直線B$''$C$''$は

$$y=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta'\right)x+\sqrt{7}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta'\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}x+\sqrt{7}=\frac{\cos\theta'}{-\sin\theta'}x+\sqrt{7}=-\frac{1}{\tan\theta'}x+\sqrt{7}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{7}$$

(ⅱ)のとき

直線B$''$C$''$は

$$y=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta'\right)x-\sqrt{7}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{7}$$

別解　(※)の続き

OB$''$とx軸のなす角の小さい方の角度はθ'より

(ｉ)のとき

B$''(2\cos\theta'、2\sin\theta')=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}、\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)$、M$''(0、\sqrt{7})$

よって、直線B$''$C$''$は

$$y=\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}-\sqrt{7}}{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}x+\sqrt{7}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{7}$$

(ⅱ)のとき

B$''(-2\cos\theta'、-2\sin\theta')=\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}、-\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)$、M$''(0、-\sqrt{7})$

よって、直線B$''$C$''$は

$$y=\frac{-\frac{4}{\sqrt{7}}-(-\sqrt{7})}{-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}x-\sqrt{7}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{7}$$

2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　問題に不備あり（全員正解扱い）

(2)　$a_1=\dfrac{1}{3}$、$(2n+1)a_n=(2n-3)a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(3)　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$$a_1=1、a_2=\frac{1}{2}、a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{8}a_n$$

解説

(1)　元の問題文

「$a_1=\dfrac{1}{3}$、$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_{n-1}}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。」

a_2 が与えられていないので、求まらない。

(2)　$(2n+1)a_n=(2n-3)a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$

両辺に $(2n-1)$ を掛けて

$$(2n+1)(2n-1)a_n=(2n-1)(2n-3)a_{n-1}$$

$b_n=(2n+1)(2n-1)a_n$ とおくと　$(b_1=3\cdot 1\cdot a_1=1)$

$$b_n=b_{n-1}$$

$$\therefore\quad b_n=b_1$$

$$\therefore\quad b_n=1$$

$$\therefore\quad (2n+1)(2n-1)a_n=1$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

別解　$(2n+1)a_n=(2n-3)a_{n-1}$ より

$$a_n=\frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1}$$

n $(n\geqq 2)$ を下にずらしていき、代入していくと

$$a_n=\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}a_{n-2}$$

$$=\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\frac{2n-7}{2n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}a_1$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$　($n=1$ のときも成立)

(3)　$a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{8}a_n$ ………①

$x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}=0$ を解くと、$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}$

よって、$p=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$、$q=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ とおくと

①は、$\begin{cases} a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n) & \cdots\cdots\cdots ② \\ a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n) & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

と変形できる。

②のとき

$b_n=a_{n+1}-pa_n$ とおくと $\left(b_1=a_2-pa_1=\dfrac{1}{2}-p=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}=q\right)$

②より

$$b_{n+1}=qb_n$$

$$\therefore\quad b_n=q\cdot q^{n-1}=q^n$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-pa_n=q^n \quad\cdots\cdots\cdots ④$$

③のとき

$c_n=a_{n+1}-qa_n$ とおくと $\left(c_1=a_2-qa_1=\dfrac{1}{2}-q=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}=p\right)$

③より

$$c_{n+1}=pc_n$$

$$\therefore\quad c_n=p\cdot p^{n-1}=p^n$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-qa_n=p^n \quad\cdots\cdots\cdots ⑤$$

④−⑤より

$$(q-p)a_n=q^n-p^n$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{3}}{2}a_m=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n\right\}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=-1$ について

(1−1)　焦点の座標を求めよ。

(1−2)　漸近線の方程式を求めよ。

(2)　２つの袋 A、B がある。A には赤球 4 個、白球 3 個、B には赤球 3 個、白球 4 個が入っている。ただし、(2−1) のあとも (2−2) のあとも、それぞれ球は元の状態に戻すものとする。

(2−1)　A から球を 1 個取り出して B に入れ、次に B から球を 1 個取り出したとき、それが赤球である確率を求めよ。

(2−2)　A から球を 1 個取り出して B に入れ、B から球を 1 個取り出す。さらに A から球を 1 個取り出して B に入れ、B から球を 1 個取り出す。このとき、B から取り出した球 2 個がともに赤球である確率を求めよ。

(2−3)　A から球を 2 個取り出して B に入れ、次に B から球を 2 個取り出す。このとき、B から取り出した球 2 個がともに赤球である確率を求めよ。

解説

(1)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=-1$ より、$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=-1$

(1−1)　$(0、\pm\sqrt{9+16})=(0、\pm 5)$

(1−2)　$y=\pm\dfrac{4}{3}x$

(2)

(2−1)　以下の表より

	A から取り出す球の色	B から取り出す球の色
(ｉ)	赤	赤
(ii)	白	赤

(ｉ)のとき、$\dfrac{4}{7}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{16}{56}$

(ii)のとき、$\dfrac{3}{7}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{56}$

よって、(ｉ)、(ii)より、求める確率は

$$\frac{16+9}{56}=\frac{25}{56}$$

(2−2)　(2−1)の表の(ｉ)、(ii)を 2 回繰り返す。

(ｉ)→(ｉ)のとき、$\left(\dfrac{4}{7}\times\dfrac{4}{8}\right)\times\left(\dfrac{3}{6}\times\dfrac{4}{8}\right)=\dfrac{16}{2^2\cdot 7\cdot 8}$

(ｉ)→(ii)のとき、$\left(\dfrac{4}{7}\times\dfrac{4}{8}\right)\times\left(\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{12}{2^2\cdot 7\cdot 8}$

(ii)→(ｉ)のとき、$\left(\dfrac{3}{7}\times\dfrac{3}{8}\right)\times\left(\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{9}{2^2\cdot 7\cdot 8}$

(ii)→(ii)のとき、$\left(\dfrac{3}{7}\times\dfrac{3}{8}\right)\times\left(\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{8}\right)=\dfrac{3}{2^2\cdot 7\cdot 8}$

以上より、求める確率は

$$\frac{16+12+9+3}{2^2\cdot 7\cdot 8}=\frac{40}{2^2\cdot 7\cdot 8}$$

$$=\frac{5}{28}$$

(2−3)

①：A から赤球 2 個を取り出すとき

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{6}{7\cdot 3}\times\frac{10}{9\cdot 4}=\frac{20}{4\cdot 7\cdot 9}$$

②：A から赤球 1 個、白球 1 個を取り出すとき

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{12}{7\cdot 3}\times\frac{6}{9\cdot 4}=\frac{24}{4\cdot 7\cdot 9}$$

③：A から白球 2 個を取り出すとき

$$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{3}{7\cdot 3}\times\frac{3}{9\cdot 4}=\frac{3}{4\cdot 7\cdot 9}$$

①～③より、求める確率は

$$\frac{20+24+3}{4\cdot 7\cdot 9}=\frac{47}{252}$$

4 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$y=\log_3(5x-7)$ を微分せよ。

(2)　任意の自然数 n に対し、関数 $f(x)$ が

$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx=n$$

を満たすとき

$$\int_{1928}^{2020} f(x)dx$$

の値を求めよ。

(3)　2 つの曲線

$$y=2\sqrt{1-\frac{x}{7}}$$

および

$$\sqrt{\frac{x}{7}}+\sqrt[3]{\frac{y}{2}}=1$$

によって囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

解説

(1)　$y=\dfrac{\log(5x-7)}{\log 3}$ より

$$y'=\frac{1}{\log 3}\cdot\frac{5}{5x-7}$$

よって、$y'=\dfrac{5}{(5x-7)\cdot\log 3}$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{1928}^{2020}f(x)dx&=\int_{1928}^{1929}f(x)dx+\int_{1929}^{1930}f(x)dx+\cdots\cdots+\int_{2019}^{2020}f(x)dx\\&=\sum_{k=1929}^{2020}\int_{k-1}^{k}f(x)dx\\&=\sum_{k=1929}^{2020}k\\&=\frac{92}{2}\cdot(1929+2020)\\&=181654\end{aligned}$$

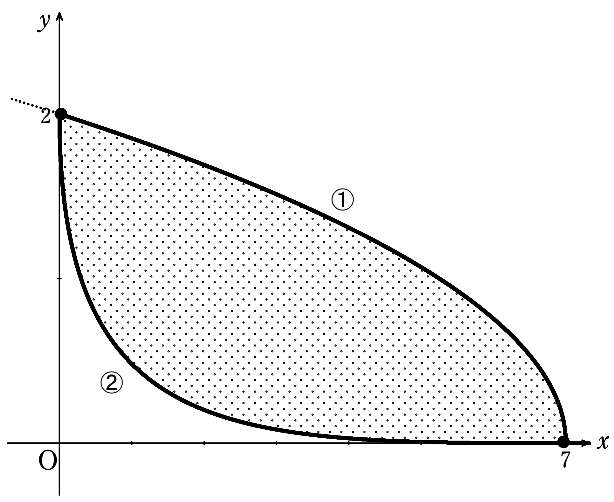
(3)　$y=2\sqrt{1-\dfrac{x}{7}}\ (x\leqq 7)$　……①

$\sqrt{\dfrac{x}{7}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{2}}=1\ (x\geqq 0)$　より

$$\sqrt[3]{\frac{y}{2}}=1-\sqrt{\frac{x}{7}}$$

∴　$y=2\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{7}}\right)^3$　……②

$0\leqq x\leqq 7$ での ①、② のグラフは以下のようになる。



よって、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^7\left(2\sqrt{1-\frac{x}{7}}\right)^2dx-\pi\int_0^7\left\{2\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^3\right\}^2dx\\&=4\pi\int_0^7\left(1-\frac{x}{7}\right)dx-4\pi\int_0^7\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6dx\\&=4\pi\left[x-\frac{x^2}{14}\right]_0^7-4\pi\int_0^7\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6dx\\&=14\pi-4\pi\int_0^7\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6dx\end{aligned}$$

ここで、$t=1-\sqrt{\dfrac{x}{7}}$ とおくと

$$dt=-\frac{1}{2\cdot 7}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{7}}}=-\frac{dx}{14(1-t)}$$

∴　$dx=-14(1-t)dt$

$x:0\to 7$ のとき、$t:0\to 1$ となるので

$$\begin{aligned}V&=14\pi-4\pi\int_1^0 t^6\{-14(1-t)\}dt\\&=14\pi-56\pi\int_0^1(t^6-t^7)dt\\&=14\pi-56\pi\left[\frac{t^6}{7}-\frac{t^8}{8}\right]_0^1\\&=14\pi-56\pi\cdot\frac{1}{56}\\&=13\pi\end{aligned}$$

参考　② のグラフについて

$y'=3\cdot\left(-\dfrac{1}{7\sqrt{\frac{x}{7}}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{7}}\right)^2$　より

$0<x<7$ で $y'<0$ となるので、$0\leqq x\leqq 7$ で単調減少となる。

また、$\sqrt{\dfrac{x}{7}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{2}}=1$ より、(7、0)、(0、2) を通るのは明らか。

参考　$0\leqq x\leqq 1$ における $x^\alpha+y^\beta=1$　$(0<\alpha<1、0<\beta<1)$ のグラフは以下のようになる。