1 次の問い（問１～３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１　200 以下のすべての正の偶数の積を計算すると、数値の末尾には 0 が連続して $\boxed{1}\boxed{2}$ 個並ぶ。200 以下のすべての正の奇数の積を計算すると、数値の末尾の数字は $\boxed{3}$ である。

問２　ある集団で 5 人に 1 人がかかる病気がある。この集団に属する A さんがその病気に関する検査を受けたところ、陽性の結果が出た。その病気にかかっている人がこの検査で正しく陽性と判定される確率は 90 %で、かかっていない人が誤って陽性と判定される確率は 5 %である。A さんがこの病気にかかっていない確率は $\boxed{4}\boxed{5}$ %である。

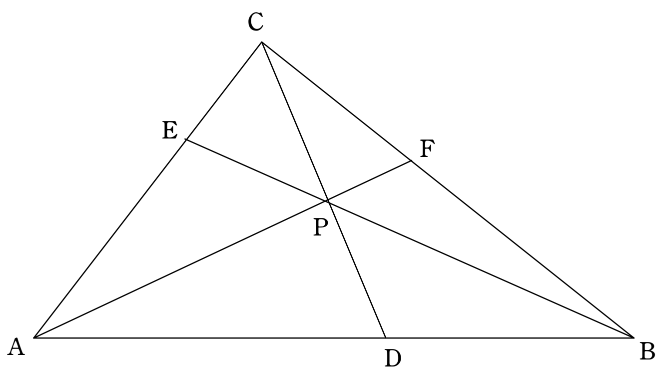
問３　図のように、△ABC において、辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D、辺 AC を 2 : 1 に内分する点を E、BE と CD の交点を P、BC と AP の延長との交点を F とする。このとき

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$$

である。また、△ABP、△BCP、△CAP の面積をそれぞれ I、J、K とおくと

$$I:J:K=\frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}:\frac{\boxed{10}}{\boxed{11}}:1$$

である。



解説

問１　200 以下のすべての正の偶数を 2 で割ると

1、2、3、………、100　　　………①

となる。

200 以下のすべての正の偶数の積の末尾の 0 の個数と、① の積の末尾の 0 の個数は一致するので、① の末尾の 0 の個数は

$$\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{5^2}\right]=20+4=24 \text{ 個}$$

また、200 以下のすべての正の奇数の 1 の位に注目すると

1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、……、199

より、1、3、5、7、9 が繰り返し 20 回現れることが分かる。

よって、$1\times3\times5\times7\times9$ の 1 の位は 5 で、5^{20} の 1 の位も 5 より

200 以下のすべての正の奇数の末尾の数字は 5

別解　以下、$mod\ 10$ として

$$\begin{aligned}1\times3\times5\times7\times9\times\cdots\cdots\times199&\equiv(1\times3\times5\times7\times9)^{20}\\&\equiv\{1\times3\times5\times(-3)\times(-1)\}^{20}\\&\equiv45^{20}\\&\equiv5^{20}\\&\equiv5\end{aligned}$$

問２　A さんが病気にかかっているという事象を E、A さんが検査で陽性と判定されるという事象を F とすると

$$P(E)=\frac{1}{5}、P_E(F)=\frac{90}{100}、P_{\overline{E}}(F)=\frac{5}{100}$$

よって、$P(\overline{E})=\dfrac{4}{5}$、$P_E(\overline{F})=\dfrac{10}{100}$、$P_{\overline{E}}(\overline{F})=\dfrac{95}{100}$

となる。

求める確率は、A さんが病気にかかっていない確率

つまり、A さんが陽性と判定されたという前提のもので、病気にかかっていない確率

より、$P_F(\overline{E})=\dfrac{P(\overline{E}\cap F)}{P(F)}$ となる。

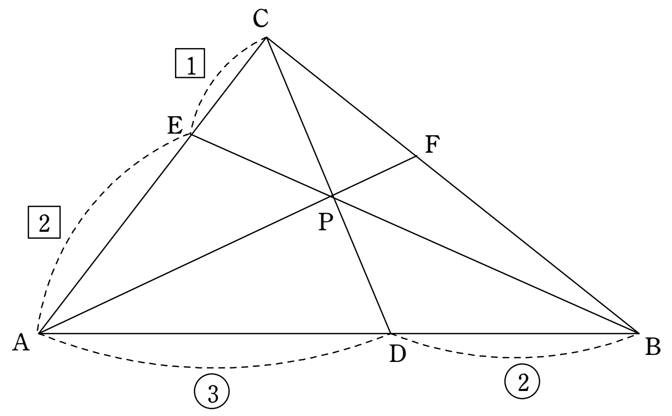
$$\begin{aligned}P(F)&=P(E\cap F)+P(\overline{E}\cap F)\\&=P_E(F)\cdot P(E)+P_{\overline{E}}(F)\cdot P(\overline{E})\\&=\frac{90}{100}\cdot\frac{1}{5}+\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{5}\\&=\frac{110}{500}\end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned}P_F(\overline{E})&=\frac{\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{110}{500}}\\&=\frac{2}{11}\\&=0.1818\cdots\cdots\end{aligned}$$

よって、A さんがこの病気にかかっていない確率は、18 %

問３



チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}=1$$

$$\therefore\ \mathrm{BF}:\mathrm{FC}=4:3$$

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=1$$

$$\therefore\ \frac{7}{4}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\therefore\ \mathrm{AP}:\mathrm{PF}=7:2$$

よって、$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{7}{9}$

これより、△ABC の面積を S とすると

$$J=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{AF}}\,\mathrm{S}=\frac{2}{9}\mathrm{S}$$

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

$$\therefore\ \frac{5}{2}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\ \mathrm{CP}:\mathrm{PD}=5:4$$

よって、$I=\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{CD}}\cdot\mathrm{S}=\dfrac{4}{9}\mathrm{S}$

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}=1$$

$$\therefore\ \frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$$\therefore\ \mathrm{EP}:\mathrm{PB}=1:2$$

よって、$K=\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{BE}}\cdot\mathrm{S}=\dfrac{1}{3}\mathrm{S}$

以上より

$$\begin{aligned}I:J:K&=\frac{4}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{1}{3}S\\&=\frac{4}{3}:\frac{2}{3}:1\end{aligned}$$

2 次の文章を読み、下の問い（問１、２）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

c を定数とし、x の関数 $f(x)$ を
$$f(x)=-x^4+2x^2-cx$$
とする。

問１　$f(x)$ が極小値を持つための必要十分条件は
$$\frac{\boxed{12}\,\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{15}}<c<\frac{\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{18}}$$
である。これが満たされているとき、極小値をとる x の範囲は
$$\frac{\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}}{\boxed{21}}<x<\frac{\sqrt{\boxed{22}}}{\boxed{23}}$$
である。

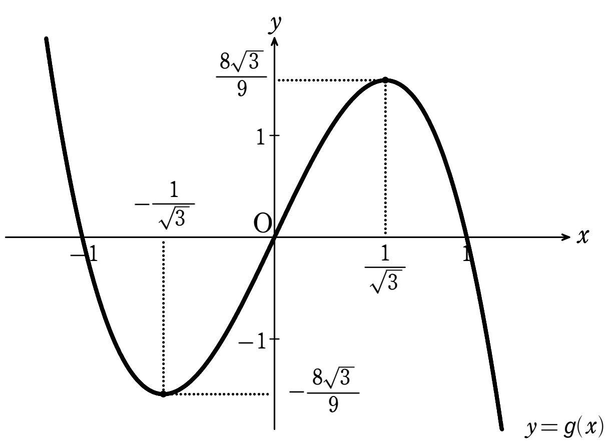
問２　$f(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ で極小値をとるとき、最大値は
$$\frac{1}{\boxed{24}\,\boxed{25}}\left(\boxed{26}\,\boxed{27}+\boxed{28}\,\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}\,\boxed{31}}\right)$$
であり、それを与える x の値は
$$x=-\frac{1}{\boxed{32}}\left(\boxed{33}+\sqrt{\boxed{34}\,\boxed{35}}\right)$$
である。

（解説）

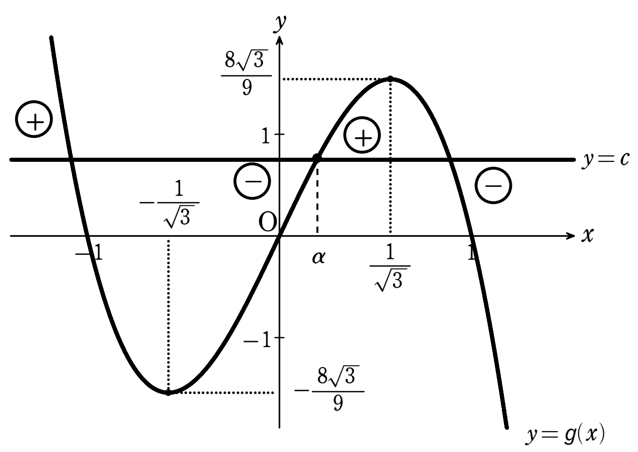
問１　$f(x)=-x^4+2x^2-cx$　より
$$f'(x)=-4x^3+4x-c$$
$$\therefore\quad f'(x)=(-4x^3+4x)-c$$
$f(x)$ が極小値をもつ条件は
$f'(x)$ が負から正と符号変化することである。
よって、$g(x)=-4x^3+4x$ とおくと
$y=g(x)$ と $y=c$ のグラフの位置関係において
$g(x)<c$ の部分から、$g(x)>c$ となる部分が存在することである ………①
$y=g(x)$ のグラフは
$$g'(x)=-12x^2+4$$
$$=-4\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
より、増減表は

x		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	↘

となるので、グラフは以下のようになる。



よって、① となるような c のとり得る値の範囲は、下の図より
$$-\frac{8\sqrt{3}}{9}<c<\frac{8\sqrt{3}}{9}$$
である。このとき、極小値をとる x の値を α とすると、α のとり得る値の範囲は、
$$-\frac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\frac{\sqrt{3}}{3}$$
となる。



問２　$f(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ で極小値をもつとき
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \text{ が必要}$$
よって、$-4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+4\cdot\dfrac{1}{2}-c=0$
$$\therefore\quad c=\frac{3}{2}$$
逆にこのとき
$$f'(x)=-4x^3+4x-\frac{3}{2}$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+2x-3)$$
$f'(x)=0$ となる x の値は、$x=\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$ より

増減表は

x		$\frac{-1-\sqrt{13}}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

となるので、確かに $x=\dfrac{1}{2}$ の前後で負から正へと符号変化しているので
十分性は示された。

ここで、$f(x)$ を $4x^2+3x-2$ で割ると、以下のようになるので

$$\begin{array}{rl}
 & -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{4} \\ \hline
4x^2+2x-3\ \big) & -x^4\qquad +2x^2-\frac{3}{2}x \\
 & -x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2 \\ \hline
 & \frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x \\
 & \frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{8}x \\ \hline
 & x^2-\frac{9}{8}x \\
 & x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \\ \hline
 & -\frac{13}{8}x+\frac{3}{4}
\end{array}$$

$f(x)=(4x^2+2x-3)\left(-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{13}{8}x+\dfrac{3}{4}$ となる。

よって
$$f\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}\right)=-\frac{13}{8}\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}\right)+\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{32}(37\mp13\sqrt{13})\quad\text{（複号同順）　より}$$

$x=-\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{13})$ で、$f(x)$ は最大値 $\dfrac{1}{32}(37+13\sqrt{13})$ をとる。

3 次の文章を読み、下の問い（問 1、2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

k を自然数とし、

$$T_k=\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^3dt$$

とする。

問 1　$T_3=\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}\,\boxed{38}}$ である。

問 2　任意の自然数 n について

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{\boxed{39}}{\boxed{40}}-\frac{\boxed{41}}{\left(n+\boxed{42}\right)\left(n+\boxed{43}\right)\left(n+\boxed{44}\right)}$$

である。ただし、$\boxed{42}<\boxed{43}<\boxed{44}$ とする。

問 3　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}T_k=\frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$ である。

解説

問 1　$T_3=\displaystyle\int_0^1 t^2(1-t)^3dt$

$=\displaystyle\int_0^1(t^2-3t^3+3t^4-t^5)dt$

$=\left[\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{3}{4}t^4+\dfrac{3}{5}t^5-\dfrac{1}{6}t^6\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{1}{60}$

問 2　$T_k=\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^3dt$

$=\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}(1-3t+3t^2-t^3)dt$

$=\displaystyle\int_0^1(t^{k-1}-3t^k+3t^{k+1}-t^{k+2})dt$

$=\left[\dfrac{1}{k}-\dfrac{3}{k+1}+\dfrac{3}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{k}-\dfrac{3}{k+1}+\dfrac{3}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}$

$=\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)-2\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)+\left(\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}\right)$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$=\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$\quad-2\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right\}$

$\quad+\left\{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)-2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

問 3　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}T_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}-\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$

$=\dfrac{1}{3}$

参考　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^ndx=\frac{m\,!\,n\,!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\cdot(-1)^n$　を用いてもよい

別解　参考 を用いると

問 1　$T_3=\displaystyle\int_0^1 t^2(1-t)^3dt$

$=-\displaystyle\int_0^1 t^2(t-1)^3dt$

$=-\dfrac{2!3!}{6!}(1-0)^{2+3+1}(-1)^3$

$=\dfrac{1}{60}$

問 2　$T_k=\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^3dt$

$=-\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}(t-1)^3dt$

$=-\dfrac{(k-1)!3!}{(k-1+3+1)!}(1-0)^{k-1+3+1}(-1)^3$

$=\dfrac{6(k-1)!}{(k+3)!}$

$=\dfrac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

$=2\left\{\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=2\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

$=2\left[\left(\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}-\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}\right)+\left(\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}-\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}\right)+\cdots\cdots\right.$

$\left.\quad+\left\{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}\right]$

$=2\left\{\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

4 次の文章を読み、下の問い（問 1～ 3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。
必要があれば、$\log_e 10 = 2.3$、$\log_{10} 2 = 0.30$ を用いること

太陽から地球に降り注ぐ光は、深海の底にほとんど届かない。海面に光が当たっているとしても、水深とともに辺りは暗くなる。一般に、光は空気や水などの物質で満たされた空間を通ると、距離とともに明るさが減少する。
いま、ある物質で満たされた空間を光が進む距離を x とし、そこでの光の明るさを $I(x)$ と表す。$I(x)$ は、$I(x)=I(0)\cdot f(x)$ と書けて、$f(x)$ は x の指数関数であるものとする。
さらに、$f(10)=\dfrac{1}{10}$ であるものとする。

問 1　$f(x)=\dfrac{1}{2}$ となるのは

$$x=\boxed{47}\ \boxed{48}$$

のときである。

問 2　$f(x)=\dfrac{1}{e}$ となるのは

$$x=\boxed{49}\ \boxed{50}$$

のときである。

問 3　$|h| \fallingdotseq 0$ のときに成り立つ 1 次の近似式 $e^{-h} \fallingdotseq 1-h$ を用いると

$$f(1) \fallingdotseq 0.\boxed{51}\ \boxed{52}$$

である。

解説

$f(x)=a^x$ とおくと

$f(10)=\dfrac{1}{10}$ より

$$a^{10}=\frac{1}{10}$$

$$\therefore\quad a=10^{-\frac{1}{10}}$$

よって、$f(x)=10^{-\frac{x}{10}}$ となる。

問 1　$f(x)=\dfrac{1}{2}$ より

$$10^{-\frac{x}{10}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad -\frac{x}{10}=\log_{10}\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad x=-10\times(-\log_{10}2)$$
$$=10\times 0.30$$
$$=3.0$$

問 2　$f(x)=\dfrac{1}{e}$ より

$$10^{-\frac{x}{10}}=\frac{1}{e}$$

$$\therefore\quad -\frac{x}{10}\log_e 10=\log_e\frac{1}{e}$$

$$\therefore\quad -\frac{x}{10}\times 2.3=-1$$

$$\therefore\quad x=\frac{10}{2.3}$$
$$=4.347\cdots$$

よって、$x=4.3$

問 3　$f(1)=10^{-\frac{1}{10}}$

ここで、$\log_e 10=2.3$ より

$$10=e^{2.3}$$

よって、$f(1)=(e^{2.3})^{-\frac{1}{10}}$
$$=e^{-0.23}\qquad\cdots\cdots\cdots ①$$

$h=0.23$ として、$e^{-h} \fallingdotseq 1-h$ を用いると

$$f(1)=1-0.23=0.77$$

別解　① の続き

$$f(1)=e^{-0.23}$$
$$=(e^{-0.115})^2$$

$h=0.115$ として、$e^{-h} \fallingdotseq 1-h$ を用いると

$$f(1)=(1-0.115)^2=0.783225$$

よって、$f(1)=0.78$

別解　① の続き

$$f(1)=e^{-0.23}$$
$$=(e^{-0.0575})^4$$

$h=0.0575$ として、$e^{-h} \fallingdotseq 1-h$ を用いると

$$f(1)=(1-0.0575)^4=0.7890\cdots\cdots$$

よって、$f(1)=0.79$