◇２０２０年　埼玉医科大学　前期

1 次の問い（問１～３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１　a、b は $1<b\leqq a$ を満たす実数である。$\log_a b+\log_b a=\dfrac{9}{2}$ のとき

$$\log_a b=\frac{\boxed{1}-\sqrt{\boxed{2}\,\boxed{3}}}{\boxed{4}}$$

である。

問２　リンゴが 25 個、ミカンが 19 個、ナシが 16 個ある。これらの果物すべてを 50 人に配ったところ、リンゴだけをもらった人は 13 人、ミカンだけをもらった人は 9 人、ナシだけをもらった人は 6 人であった。リンゴ、ミカン、ナシのすべてをもらった人は最大で $\boxed{5}$ 人であり、1 つも果物をもらえなかった人は最大で $\boxed{6}\,\boxed{7}$ 人である。ただし、同じ人が同じ種類の果物を 2 個以上もらうことはできないものとする。

問３　4 辺うち、3 辺の長さが a である台形の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{8}\sqrt{\boxed{9}}}{\boxed{10}}a^{\boxed{11}}$

である。

(解説)

問１　$\log_a b+\log_b a=\dfrac{9}{2}$　より

$$\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\quad 2(\log_a b)^2-9\log_a b+1=0$$

$$\therefore\quad \log_a b=\frac{9\pm\sqrt{65}}{4}$$

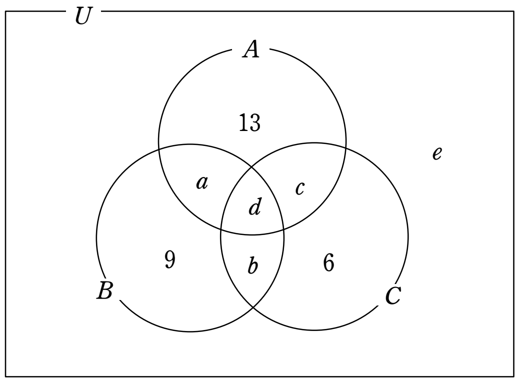
$1<b\leqq a$ より、$\log_a 1<\log_a b\leqq\log_a a$

よって、$0<\log_a b\leqq 1$ より

$$\log_a b=\frac{9-\sqrt{65}}{4}$$

問２　リンゴ、ミカン、ナシを持っているという事象をそれぞれ A、B、C として

ベン図を以下のように設定する。



ただし、$n(A\cap B\cap\overline{C})=a$、$n(\overline{A}\cap B\cap C)=b$、$n(A\cap\overline{B}\cap C)=c$、$n(A\cap B\cap C)=d$

$n(\overline{A\cup B\cup C})=e$ とする。

リンゴが 25 個、ミカンが 19 個、ナシが 16 個あり、50 人に配ったことを考慮すると

$$\begin{cases}13+a+c+d=25\\ 9+a+b+d=19\\ 6+b+c+d=16\\ 13+9+6+a+b+c+d+e=50\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}a+c+d=12\ \cdots\cdots\cdots\ ①\\ a+b+d=10\ \cdots\cdots\cdots\ ②\\ b+c+d=10\ \cdots\cdots\cdots\ ③\\ a+b+c+d+e=22\ \cdots\cdots\ ④\end{cases}$$

①－②より

$$c-b=2$$

$$\therefore\quad b=c-2\ \cdots\cdots⑤$$

ただし、$b\geqq 0$ より、$c\geqq 2$ ……⑥

②－③より

$$a-c=0$$

$$\therefore\quad a=c\ \cdots\cdots⑦$$

①、⑦より

$$a+a+d=12$$

$$\therefore\quad d=12-2a\ \cdots\cdots⑧$$

⑥、⑦より、$a\geqq 2$ ……⑨

⑧、⑨より、$d=12-2a\leqq 8$

よって、$a=2$、$b=0$、$c=2$ のとき、d の最大値は 8

また、④、⑤、⑦、⑧より

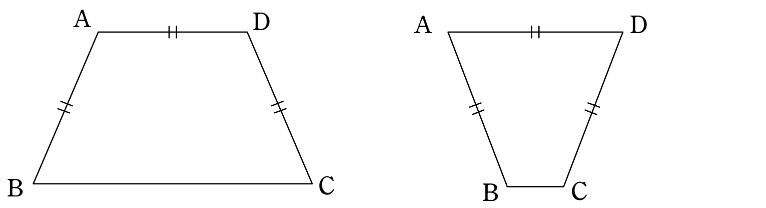
$$a+(a-2)+a+(12-2a)+e=22$$

$$\therefore\quad e=12-a\leqq 10\quad(\because ⑨)$$

よって、$a=2$、$b=0$、$c=2$ のとき、e の最大値は 10

以上より、リンゴ、ミカン、ナシのすべてをもらった人は最大で 8 人であり、1 つも果物をもらえなかった人は最大で 10 人である。

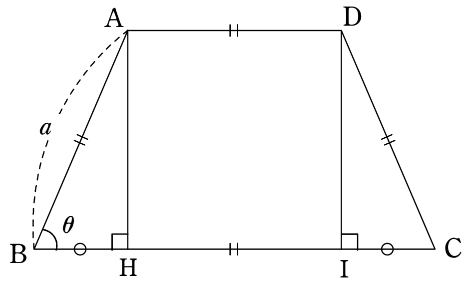
問３　4 辺うち、3 辺の長さが a の台形より、以下の 2 つの等脚台形が考えられる。



面積が最大となるのは AD＞BC のときである。

A、D から BC に下ろした垂線の足をそれぞれ H、I とする。………(※)

また、$\angle\mathrm{ABC}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると



$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\cos\theta=a\cos\theta$$
$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin\theta=a\sin\theta$$

台形ABCD の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\cdot\mathrm{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AD}+\mathrm{BH}+\mathrm{HI}+\mathrm{IC})\cdot\mathrm{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2(\mathrm{AD}+\mathrm{BH})\cdot\mathrm{AH}$$
$$=(a+a\cos\theta)\cdot a\sin\theta$$
$$=a^2(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta$$

よって、$S'=a^2\{(-\sin\theta)\cdot\sin\theta+(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta\}$

$$=a^2(-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$$
$$=a^2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$$

より、増減表は以下のようになる。

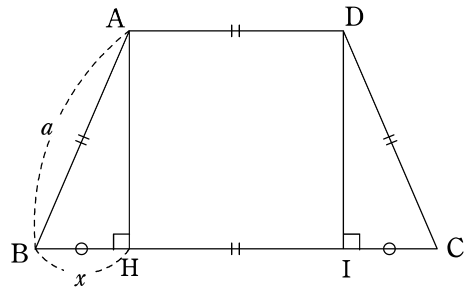
θ	0		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	↘	

よって、$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ となる。

(別解)（※）の続きから

$\mathrm{BH}=x$ とおくと $(0<x<a)$

三平方の定理より



$$\mathrm{AH}^2=a^2-x^2\ (>0)$$

$$\therefore\quad\mathrm{AH}=\sqrt{a^2-x^2}$$

台形ABCD の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\cdot\mathrm{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AD}+\mathrm{BH}+\mathrm{HI}+\mathrm{IC})\cdot\mathrm{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2(\mathrm{AD}+\mathrm{BH})\cdot\mathrm{AH}$$
$$=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\sqrt{(a+x)^2(a^2-x^2)}$$
$$=\sqrt{(a+x)^3(a-x)}$$

$a+x=t$ とおくと、$0<x<a$ より、$a<t<2a$

$$S=\sqrt{t^3(2a-t)}$$

$f(t)=t^3(2a-t)$ とおくと

$$f(t)=2at^3-t^4$$
$$f'(t)=6at^2-4t^3$$
$$=2t^2(3a-2t)$$

より、増減表は以下のようになる。

t	a		$\dfrac{3}{2}a$		$2a$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$\dfrac{27}{16}a^4$	↘	

よって、$t=\dfrac{3}{2}a$ で $f(t)$ は最大値 $\dfrac{27}{16}a^4$ となるので

S は、$x=\dfrac{a}{2}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ となる

2 以下の文章を読み、下の問い（問１～３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$a>0$ として、曲線 $y=ax^2-\dfrac{1}{a}$ を考える。

問１　曲線上の点で原点Ｏに最も近い点のうち、x 座標が正のものを点Ｐとすると Ｐの座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{13}\,a},\ -\frac{\boxed{14}}{\boxed{15}\,a}\right)$$

である。

問２　$\mathrm{OP}=1$ のとき、$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{16}}}{\boxed{17}}$ である。

問３　a が問２で求めた値のとき、曲線とＯＰを通る直線で囲まれた図形を y 軸周りに１回転してできる立体の体積 V は

$$V=\frac{\boxed{18}\,\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}}{\boxed{21}\,\boxed{22}}\pi$$

である。

（解説）

問１　曲線 $y=ax^2-\dfrac{1}{a}$ 上の点 $\left(t,\ at^2-\dfrac{1}{a}\right)$ と原点Ｏとの距離を L とすると

$$L^2=t^2+\left(at^2-\frac{1}{a}\right)^2$$
$$=t^2+a^2t^4-2t^2+\frac{1}{a^2}$$
$$=a^2t^4-t^2+\frac{1}{a^2}$$
$$=a^2\left(t^2-\frac{1}{2a^2}\right)^2+\frac{3}{4a^2}\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

よって、L が最小となるのは $t^2=\dfrac{1}{2a^2}$ のとき

つまり、$a>0$ より、$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}\,a}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2a}$ のときである。

よって、曲線上の点で原点Ｏに最も近い点のうち、x 座標が正のものである点Ｐの座標は、$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2a},\ -\dfrac{1}{2a}\right)$

問２　$\mathrm{OP}=1$ より、$L^2=1$

よって、① より

$$\frac{3}{4a^2}=1$$
$$\therefore\quad a^2=\frac{3}{4}$$

$a>0$ より、$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

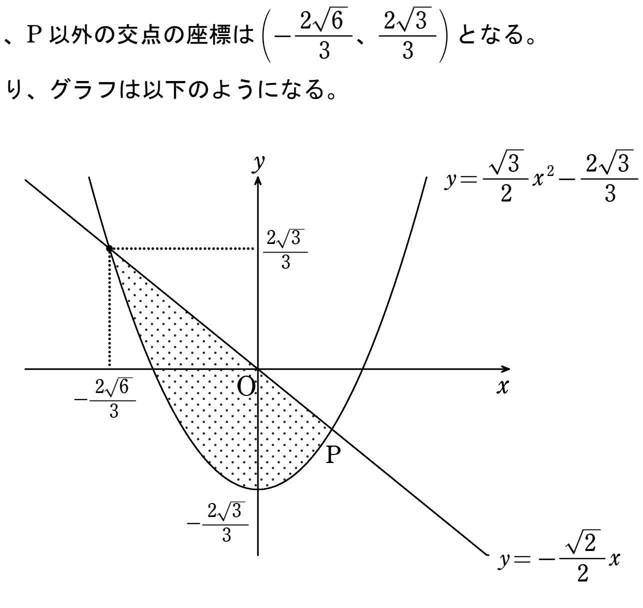
問３　問２より、$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ となるので

曲線：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ と直線ＯＰ：$y=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ との交点の座標は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$$
$$\therefore\quad 3\sqrt{3}\,x^2+3\sqrt{2}\,x-4\sqrt{3}=0$$
$$\therefore\quad (3x-\sqrt{6})(\sqrt{3}\,x+2\sqrt{2})=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{6}}{3},\ -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

よって、Ｐ以外の交点の座標は $\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ となる。

これより、グラフは以下のようになる。



よって、求める立体の体積を V とすると

V は上の図の $x\leqq 0$ の打点部分を y 軸周りに１回転してできる立体の体積となるので

$$V=\pi\int_{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}x^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left(y+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)dy-\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$$
$$=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\frac{2\sqrt{3}}{3}dy-\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$$
$$=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}y\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}-\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$$
$$=\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$$
$$=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$$

3 以下の文章を読み、下の問い（問１～３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

１辺の長さが１である正四面体 ABCD がある。AD の中点を E、AB を $t:(1-t)$ に内分する点をPとする。ただし、$0 \leqq t \leqq 1$ であるものとする。

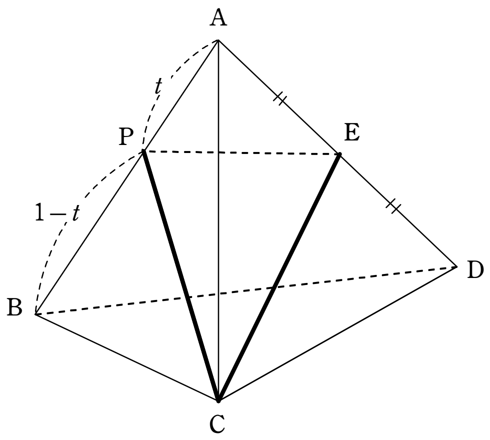
問１　三角形 CEP の面積を $S(t)$ で表すと、$S(t)=\dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}$ である。

問２　任意の t に対し、$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}}\left(\boxed{27}-\boxed{28}\,t\right)$ であり

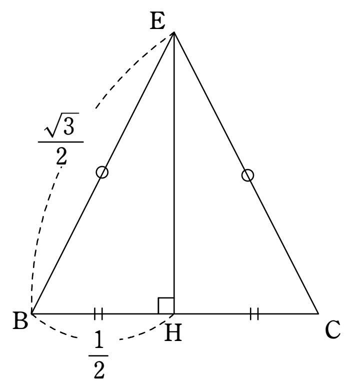
$\mathrm{CP}^2=\boxed{29}\,t^2-\boxed{30}\,t+\boxed{31}$ である。

問３　$S(t)$ は $t=\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}\,\boxed{34}}$ のとき、最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{35}\,\boxed{36}}}{\boxed{37}\,\boxed{38}}$ をとる。

解説



問１　$t=1$ のとき、$S(t)$ は $\triangle$CEB の面積と一致する。
E から BC に下した垂線の足を H とすると



三平方の定理より

$$\mathrm{EH}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、$S(1)=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

問２　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=1$、$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{2}$ で

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$、$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}\}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}(3-t)$$

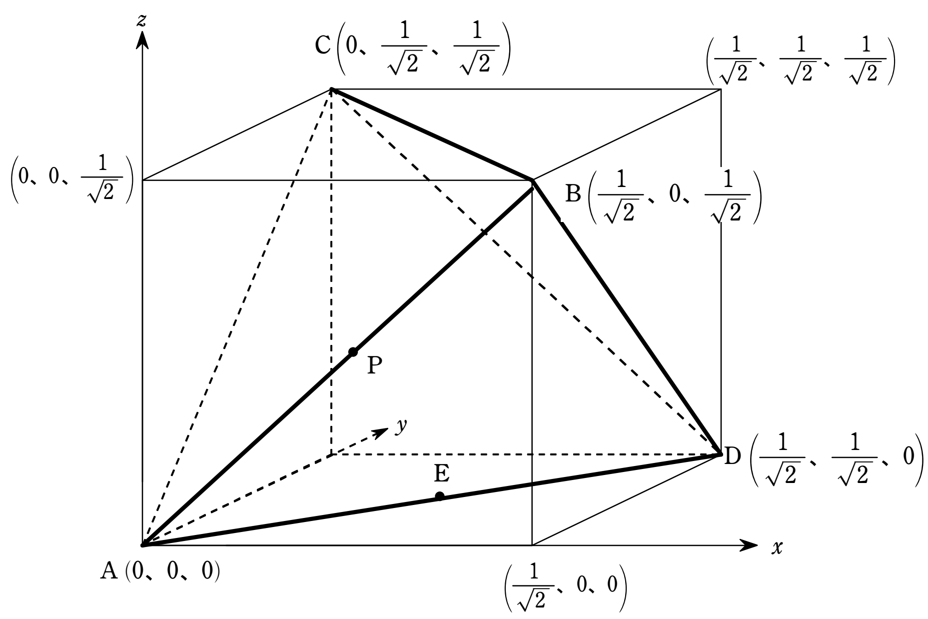
$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=(1-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}+t^2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2$$
$$=(1-t^2)\cdot1+2t(1-t)\cdot\frac{1}{2}+t^2\cdot1$$
$$=t^2-t+1$$

別解

１辺の長さが１の正四面体は、１辺が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の立方体に内接するので

A $(0, 0, 0)$、B $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$、C $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$、D $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

とすると、P は $\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$、E は $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ となる。



よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\begin{pmatrix}\frac{t}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{t-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{t}{4}+\frac{1}{4}-\frac{t-1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}(3-t)$$

$$\mathrm{CP}^2=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{(t-1)^2}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(2t^2-2t+2)$$
$$=t^2-t+1$$

問３　
$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(t^2-t+1)\cdot1-\left(\frac{3-t}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-t+1-\frac{9-6t+t^2}{16}}$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{11t^2-6t+3}$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{11\left(t-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{24}{11}}$$

$0\leqq t\leqq 1$ より、$t=\dfrac{3}{11}$ で、$S(t)$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{66}}{44}$ をとる。

4 以下の文章を読み、下の問い(問１、２)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

1 組 52 枚のトランプを模様（スペード、ハート、クローバー、ダイヤ）ごとに 4 つの束に分け、それぞれ束から 1 枚ずつ無作為に引く。そして、スペードの束から引いたカードの数を a、ハートの束から引いたカードの数字を b、クローバーから引いたカードの数字を c、ダイヤの束から引いたカードの数字を d とする。

ただし、J（ジャック）は 11、Q（クイーン）は12、K（キング）は13 であるものとする。

問 1　$a+b+c=6$ となる確率は $\dfrac{\boxed{39}\,\boxed{40}}{\boxed{41}\,\boxed{42}\,\boxed{43}\,\boxed{44}}$ である。このとき、

積 abc の最大値は $\boxed{45}$ であり、最小値は $\boxed{46}$ である。

問 2　$a+b+c+d=8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{47}\,\boxed{48}}{\boxed{49}\,\boxed{50}\,\boxed{51}\,\boxed{52}\,\boxed{53}}$ である。

また、$a+b+c+d=8$ であるとき、積 $abcd$ が最小となる確率は $\dfrac{\boxed{54}}{\boxed{55}\,\boxed{56}}$ である。

解説

問 1　$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq 13$ とするとき、$a+b+c=6$ となる $(a、b、c)$ の組合せは

$(a、b、c)=(1、1、4)、(1、2、3)、(2、2、2)$

となる。

a、b、c の大小関係を取り去るときの、a、b、c への数字の割り当て方は

(ⅰ) $(a、b、c)=(1、1、4)$ のとき、$\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り

(ⅱ) $(a、b、c)=(1、2、3)$ のとき、$3!=6$ 通り

(ⅲ) $(a、b、c)=(2、2、2)$ のとき、1 通り

よって、求める確率は

$$\frac{3+6+1}{(13)^3}=\frac{10}{2197}$$

また、積 abc の最大値は、(ⅲ) のときの 8、最小値は、(ⅰ) のときの 4

問 2　$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq 13$ とするとき、$a+b+c+d=8$ となる $(a、b、c)$ の組合せは

$(a、b、c、d)=(1、1、1、5)、(1、1、2、4)、(1、1、3、3)$
$(1、2、2、3)、(2、2、2、2)$

となる。

a、b、c、d の大小関係を取り去るときの、a、b、c、d への数字の割り当て方は

(ⅰ) $(a、b、c、d)=(1、1、1、5)$ のとき、$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通り

(ⅱ) $(a、b、c、d)=(1、1、2、4)$ のとき、$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り

(ⅲ) $(a、b、c、d)=(1、1、3、3)$ のとき、$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り

(ⅳ) $(a、b、c、d)=(1、2、2、3)$ のとき、$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り

(ⅴ) $(a、b、c、d)=(2、2、2、2)$ のとき、1 通り

よって、求める確率は

$$\frac{4+12+6+12+1}{(13)^4}=\frac{35}{28561}$$

また、積 $abcd$ が最小となるのは、(ⅰ) のときの 5 である。

よって、$a+b+c+d=8$ であるとき、積 $abcd$ が最小となる条件付き確率は

$$\frac{\frac{4}{(13)^4}}{\frac{35}{(13)^4}}=\frac{4}{35}$$

参考　$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=m$　(x_1、x_2、……、x_n は非負整数、m は自然数) を満たす $(x_1、x_2、\cdots\cdots、x_n)$ の組み合わせは

${}_{m+n-1}C_{n-1}$ 通り

である。

別解　上の 参考 を利用して

問 1　$a+b+c=6$ より、$(a-1)+(b-1)+(c-1)=3$

$a-1=A$、$b-1=B$、$c-1=C$ とおくと

$A+B+C=3$ (A、B、C は非負整数)……… ① となるので

① を満たす自然数A、B、C の組合せは、${}_{3+3-1}C_{3-1}={}_5C_2=10$ 通り

A、B、C と a、b、c は一対一対応より

求める確率は、$\dfrac{10}{(13)^3}=\dfrac{10}{2197}$

問 2　$a+b+c+d=8$ より、$(a-1)+(b-1)+(c-1)+(d-1)=4$

$a-1=A$、$b-1=B$、$c-1=C$、$d-1=D$ とおくと

$A+B+C+D=4$ (A、B、C、D は非負整数)……… ② となるので

② を満たす自然数A、B、C、D の組合せは、${}_{4+4-1}C_{4-1}={}_7C_3=35$ 通り

A、B、C、D と a、b、c、d は一対一対応より

求める確率は、$\dfrac{35}{(13)^4}=\dfrac{35}{28561}$

$\dfrac{10}{(13)^3}=\dfrac{10}{2197}$