1 O を原点とする空間ににおいて２点 A、B を $\mathrm{OA}=\sqrt{3}$、$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ を満たすようにとる。さらに、点Pは以下の条件 (※) を満たしながら空間内を動くものとする。

(※)「$\mathrm{BP}=\sqrt{2}$、かつ$\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{\pi}{3}$、かつ４点 O、A、B、P は同一平面上に存在しない」

点 B から三角形 OAP を含む平面に垂線 BH を下ろす。$0<x<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ を満たす各 x に対して、条件 (※) と $\mathrm{OP}=x$ を満たす点 P が存在することは認めてよい。

以下では、$x=\mathrm{OP}$、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$、$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおく。

このとき、以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ヒ}$ に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ。ただし、有理数は既約分数で表すこと。

問１　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$、$\vec{a}\cdot\vec{p}$、$\vec{b}\cdot\vec{p}$ を x を用いてそれぞれ次のように表せる。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}、\quad \vec{a}\cdot\vec{p}=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}x、\quad \vec{b}\cdot\vec{p}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}x^2$$

問２　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 s、t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{p}$$

と表せる。このとき、s、t は x を用いてそれぞれ次のように表せる。

$$s=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}-\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}x、\quad t=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}-\frac{\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

問３　$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=\frac{1}{\boxed{ソ}}\left(-x^2+\sqrt{\boxed{タ}}\,x+\boxed{チ}\right)$$

問４　点 P が条件 (※) と $\dfrac{1}{3}\leqq\vec{b}\cdot\vec{p}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$ を満たしながら動くとき、$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ は

$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ をとり、$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$ のとき最小値

$\dfrac{\boxed{ネ}+\boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$ をとる。

解説

問１

△OAB で余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$\therefore\ 2=3+2-2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$

また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{p}=\sqrt{3}\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

△OBP で余弦定理より

$$\mathrm{BP}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\cdot\cos\angle\mathrm{BOP}$$

$\therefore\ 2=2+x^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}x^2$

問２　BH⊥平面OAP より

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　かつ、$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　かつ、$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

$\therefore\ (\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　かつ、$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

$\therefore\ (s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0$　かつ、$(s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{p}=0$

$\therefore\ s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{p}-|\vec{a}|^2=0$　かつ、$s\vec{a}\cdot\vec{p}+t|\vec{p}|^2-\vec{b}\cdot\vec{p}=0$

$\therefore\ 3s+\dfrac{\sqrt{3}}{2}xt-3=0$　かつ、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}xs+x^2t-\dfrac{1}{2}x^2=0$

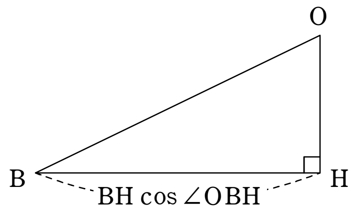
$\therefore\ s=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}x$、$t=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)$

問３　$\mathrm{OB}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{BH}^2$

$$\begin{aligned}
\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2\\
&=2-|s\vec{a}+t\vec{p}|^2\\
&=2-(s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{p}+t^2|\vec{p}|^2)\\
&=2-(3s^2+\sqrt{3}\,stx+t^2x^2)\\
&=2-(3s^2+\sqrt{3}\,stx+t^2x^2)\\
&=2-\left\{3\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)^2+\sqrt{3}\,x\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3x}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3x}\right)^2\cdot x^2\right\}\\
&=2-\left(\frac{4}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{9}x+\frac{x^2}{9}\right)-\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}x-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}x^2+\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)\\
&\qquad-\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{4\sqrt{3}}{9}x+\frac{1}{3}\right)\\
&=-\frac{1}{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x+1\\
&=\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}\,x+3)
\end{aligned}$$

別解

$$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|\cos\angle\mathrm{OBH}=|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$$



よって、
$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\
&=(-\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\\
&=-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t\,\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2\\
&=-\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3x}\right)\cdot\frac{1}{2}x^2+2\\
&=\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}\,x+3)
\end{aligned}$$

参考　$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2>0$ より

$$-x^2+\sqrt{3x}+3>0$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$$

$x>0$ より、$0<x<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$　となる。

問４　$\dfrac{1}{3}\leqq\vec{b}\cdot\vec{p}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$ より

$\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{1}{2}x^2\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$

$\therefore\ \dfrac{2}{3}\leqq x^2\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{2}x$

$\therefore\ \dfrac{2}{3}\leqq x^2$ かつ、$x^2\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{2}x$

$\therefore\ \left(x-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\geqq0$ かつ、$x\left(x-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)\leqq0$

$\therefore\ x\leqq-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$、$\dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq x$ かつ、$0\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

このとき

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2&=\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}\,x+3)\\
&=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

よって、$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、最大値 $\dfrac{5}{4}$

$x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき、最小値 $\dfrac{5+2\sqrt{21}}{12}$

2 n を 1 以上の整数とする。中が見えない n 個の袋があり、それぞれの袋の中には 1 から 5 までの数字がそれぞれ 1 つずつ書かれたカードが 5 枚入っている。これら n 個の各袋からカードを 1 枚ずつ取り出すとき、取り出された n 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数である確率を p_n とする。

問 1　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

問 2　$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}p_n$ に対して、不等式

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq|p_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

を満たす n の値がちょうど 20 個存在するように 1 以上の整数 m の値を定めることは可能か。可能ならば、その値を求め、不可能ならばその理由を説明せよ。

ただし、$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$ であるとする。

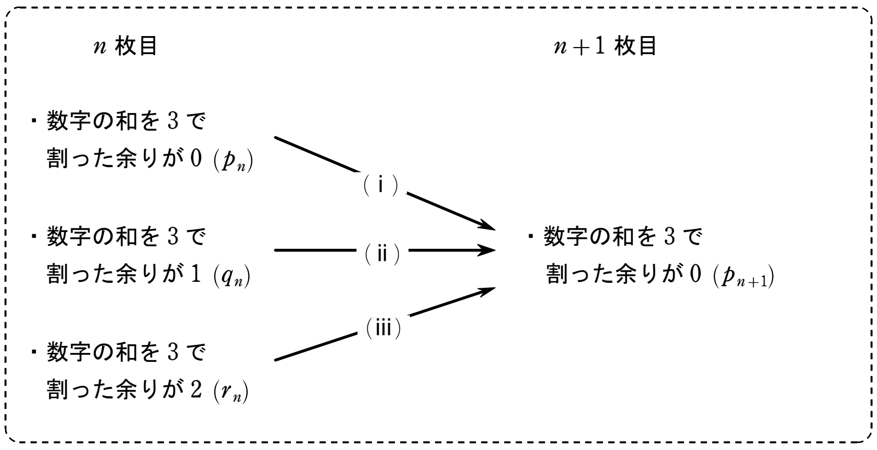
（解説）

問 1　n 枚の数字の和を 3 で割った余りが 0 である確率が p_n より、n 枚の数字の和を 3 で割った余りが 1 である確率を q_n、2 である確率を r_n とすると

$$p_n+q_n+r_n=1 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。

また、n 枚目から $n+1$ 枚目への数字の和の状態推移は以下の図のようになる。



(i)～(iii) の確率は以下のようになる。

(i)　3 を引けばよいので、$\frac{1}{5}$

(ii)　1 または 4 を引けばよいので、$\frac{2}{5}$

(iii)　2 または 5 を引けばよいので、$\frac{2}{5}$

以上より

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{5}q_n+\frac{2}{5}r_n\\&=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{5}(q_n+r_n) \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

① より、$q_n+r_n=1-p_n$

② に代入して

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{5}(1-p_n)$$

$$\therefore\ p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5} \quad \cdots\cdots ③$$

問 2　③ より

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

$p_1=\frac{1}{5}$ より

$$\begin{aligned}p_n-\frac{1}{3}&=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\&=-\frac{2}{15}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\&=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}\end{aligned}$$

$$\therefore\ p_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{3}$$

よって、$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{3}$ となる。

これより、与式から

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq|p_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq\left|\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right|\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

$$\therefore\ \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq\log_{10}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n\leqq\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

$$\therefore\ 2m\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)\leqq\log_{10}\frac{2}{3}+n\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)\leqq m\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\therefore\ -2m\leqq\log_{10}2-\log_{10}3-n\log_{10}5\leqq-m$$

$$\therefore\ -2m\leqq\log_{10}2-\log_{10}3-n\log_{10}\frac{10}{2}\leqq-m$$

$$\therefore\ -2m\leqq\log_{10}2-\log_{10}3-n(1-\log_{10}2)\leqq-m$$

$$\therefore\ \log_{10}3-\log_{10}2-2m\leqq-n(1-\log_{10}2)\leqq\log_{10}3-\log_{10}2-m$$

$$\therefore\ \frac{m-\log_{10}3+\log_{10}2}{1-\log_{10}2}\leqq n\leqq\frac{2m-\log_{10}3+\log_{10}2}{1-\log_{10}2}$$

$$\therefore\ \frac{m-0.1761}{0.6990}\leqq n\leqq\frac{2m-0.1761}{0.6990} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

これを満たす n がちょうど 20 個存在するので

$$19\leqq\frac{2m-0.1761}{0.6990}-\frac{m-1.761}{0.6990}<21 \quad \cdots\cdots(※)$$

が必要。

つまり、$19\leqq\frac{m-0.1761}{0.6990}<21$

$$\therefore\ 13.2810\leqq m<14.6790$$

よって、$m=14$ が必要となる。

逆にこのとき、④ より

$$\frac{14-0.1761}{0.6990}\leqq n\leqq\frac{2\cdot14-0.1761}{0.6990}$$

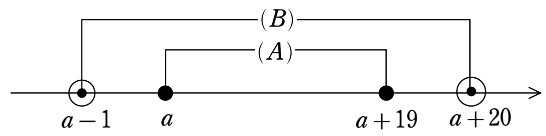
$$\therefore\ 19.7\cdots\leqq n\leqq 39.8\cdots$$

よって、これを満たす整数 n は、$n=20$、21、……、39 より 20 個となる。

題意を満たす n は存在し、そのときの m は、$m=14$

参考　(※) について

数直線を考えると、整数の個数が 20個 となるのは、a を整数として



(A) より、差が 19 以上、(B) より、差が 21 未満と分かる。

ただし、以下の (i)、(ii) のように

(i)　0.3 以上、19.3 以下は、$19.3-0.3=19$ より、差が 19 以上に当てはまるが、0.3 以上、19.3 以下に含まれる整数の個数は、1、2、3、……、19 より、19 個

(ii)　0.3 以上、21 以下は、$21-0.3=20.7$ より、差が 21 未満に当てはまるが、0.3 以上、21 以下に含まれる整数の個数は、1、2、3、……、21 より、20 個

となり、逆は成り立たないので、(※) は必要条件となる。

3 O を原点とする xyz 空間内において、各 $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し、3 点 P、Q、R を次のように定める。

$$\mathrm{P}\left(3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}},\ \theta\right)$$
$$\mathrm{Q}\left(-(\sin\theta)^{\frac{3}{2}},\ (\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}},\ \theta\right)$$
$$\mathrm{R}\ (0,\ 0,\ \theta)$$

θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき、線分 PQ が通過してできる曲面を K とし、K を z 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とする。

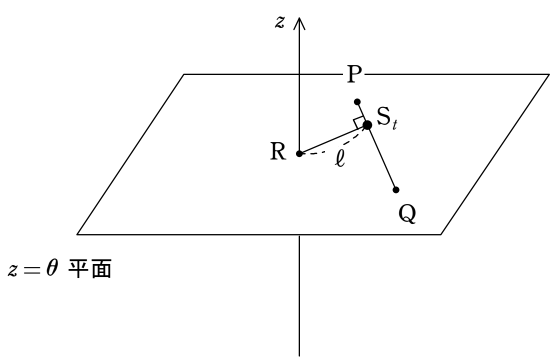
問 1　2 点P、Q に対して、線分 PQ を $t:(1-t)$（ただし、$0\leqq t\leqq 1$）に内分する点を S_t とする。t が 0 から 1 まで動くとき、2 点 R、S_t 間の距離の最小値 ℓ を θ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　次の不定積分を求めよ。ただし、積分定数は省略してよい。答えのみでよい。
$$\int\frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

問 3　V の値を求めよ。

（解説）

問 1



3 点P、Q、R は平面 $z=\theta$ 上の点より、R、S_t 間が最小となるのは、
R から直線 PQ に下ろした垂線の足が、S_t と一致するときである。

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}、\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ 0\end{pmatrix}$$ より

$\mathrm{RP}=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$、$\mathrm{RQ}=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$ となるので
$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\mathrm{RP}^2+\mathrm{RQ}^2}$$
$$=\sqrt{3^{\frac{1}{2}}\cos\theta+\sin\theta}$$
となる。

よって、RP⊥RQ を考慮すると、△PQR の面積について
$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\ell=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{RP}\cdot\mathrm{RQ}$$
となる。よって
$$\frac{1}{2}\ell\sqrt{3^{\frac{1}{2}}\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1}{2}\cdot3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\times(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore\ \ell=\frac{3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3^{\frac{1}{2}}\cos\theta+\sin\theta}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}}$$

別解　$\mathrm{RP}=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$、$\mathrm{RQ}=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$、$\mathrm{PQ}=\sqrt{3^{\frac{1}{2}}\cos\theta+\sin\theta}$ の続きから
$$\sin\angle\mathrm{RPQ}=\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{PQ}}$$
$$=\frac{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3^{\frac{1}{2}}\cos\theta+\sin\theta}}$$
よって、$\ell=\mathrm{RP}\cdot\sin\angle\mathrm{RPQ}$
$$=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3^{\frac{1}{2}}\cos\theta+\sin\theta}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}}$$

問 2　$\displaystyle\int\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}d\theta$
$$=\int\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$$
$\cos\theta=t$ とおくと　$-\sin\theta\,dx=dt$

よって　（与式）$\displaystyle=-\int\frac{dt}{1-t^2}$
$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\{-\log|1-t|+\log|1+t|\}+C$$
$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}+C$$ （C は省略してもよい）

問 3　K を $z=\theta$ で切ったときの断面は、$z=\theta$ 平面上で線分 PQ を R のまわりに 1 回転させてできる図形と一致する。

ここで、$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で
$$\mathrm{RP}-\mathrm{RQ}=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}-(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\quad\cdots\cdots(※)$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}{3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}+(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{\cos\theta(\sqrt{3}-\tan\theta)}{3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}+(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$ より

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ で、RP≧RQ、$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で、RP≦RQ となるので

断面積は
$$\begin{cases}0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\ \text{のとき、}\pi\mathrm{RP}^2-\pi\mathrm{RS}_t{}^2=\pi(\mathrm{RS}^2-\ell^2)\\[2mm] \dfrac{\pi}{3}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\ \text{のとき、}\pi\mathrm{RQ}^2-\pi\mathrm{R}S_t{}^2=\pi(\mathrm{RQ}^2-\ell^2)\end{cases}$$
となる。よって、求める立体の体積 V は
$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\mathrm{RP}^2-\ell^2)d\theta+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{RQ}^2-\ell^2)d\theta$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{RP}^2d\theta+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{RQ}^2d\theta-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ell^2d\theta$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$
$$=\pi\Big[\sqrt{3}\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\pi\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$
$$=2\pi-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}d\theta$$

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと、$d\theta=dt$

$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$t:\dfrac{\pi}{3}\to\dfrac{5}{6}\pi$ より
$$V=2\pi-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\sqrt{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin t}dt$$
$$=2\pi-\sqrt{3}\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)\left(\frac{1}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right)}{2\sin t}dt$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\sqrt{3}\sin^2t-\sqrt{3}\cos^2t-2\sin t\cos t}{\sin t}dt$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\sqrt{3}\sin^2t-\sqrt{3}(1-\sin^2t)-2\sin t\cos t}{\sin t}dt$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{2\sqrt{3}\sin^2t-\sqrt{3}-2\sin t\cos t}{\sin t}dt$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(2\sqrt{3}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{\sin t}-2\cos t\right)dt$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\left[-2\sqrt{3}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t}-2\sin t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\left\{2+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\log(2+\sqrt{3})^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\log3\right\}$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\{2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}\log\sqrt{3}\}$$
$$=2\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\{2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\log(2\sqrt{3}+3)\}$$
$$=\left\{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}\log(2\sqrt{3}+3)\right\}\pi$$

別解　(※)の続き

$f(\theta)=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}-(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(\theta)=3^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{-\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}-\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}$$

$$=\frac{-\left(3^{\frac{1}{4}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta+\cos^{\frac{3}{2}}\theta\right)}{2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}<0$$

よって、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $f(\theta)$ は単調減少となる。

ここで、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $f(\theta)=0$ となる θ は

$$3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}-(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}=0$$

$\therefore\ \tan^{\frac{1}{2}}\theta=3^{\frac{1}{4}}$

$\therefore\ \tan\theta=\sqrt{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、$\theta=\frac{\pi}{3}$

以上より、$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ で、$f(\theta)\geqq0$ より、$\mathrm{RP}\geqq\mathrm{RQ}$

$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ で、$f(\theta)\leqq0$ より、$\mathrm{RP}\leqq\mathrm{RQ}$ となる。（以下略）

4 次で定義される関数 $f(s)$ に対して以下の各問いに答えよ。

$$f(s)=\begin{cases}\dfrac{s}{16} & (0\leqq s\leqq 4)\\ -\dfrac{s}{16}+\dfrac{1}{2} & (4< s\leqq 8)\\ 0 & (s<0 \text{ または } 8<s)\end{cases}$$

問１　関数 $t=f(s)$ のグラフと、関数 $t=f(s)$ のグラフを s 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ。答えのみでよい。

問２　関数 $t=f(s)$ に対して $s\geqq 0$ を定義域とする関数 $t=F(s)$、$t=G(s)$ を次で定義する。

$$F(s)=\int_0^s f(u)du、\quad G(s)=\int_0^s f(u-4)du$$

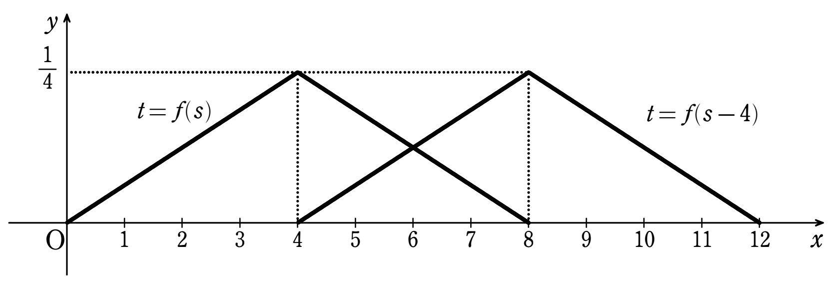
関数 $F(s)$、$G(s)$ をそれぞれ求め、これら 2 つの関数のグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ。

問３　問２で求めた関数 $F(s)$、$G(s)$ に対し、$x=G(s)$、$y=F(s)$ とおく。点 $(x、y)$ の描く曲線の概形を xy 平面上に図示せよ。

問４　問２で求めた関数 $F(s)$、$G(s)$ に対し、xy 平面上の 2 点 $(0、1)$ と $(x、y)=(G(s)、F(s))$ の間の距離の最小値を与える s の値を求めよ。

解説

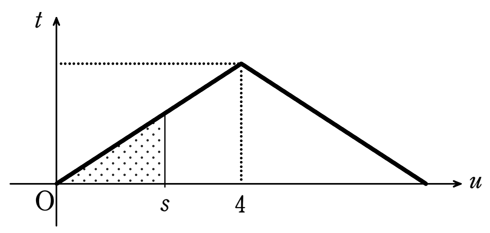
問１　$t=f(s)$ のグラフと、$t=f(s)$ のグラフを s 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフ $y=f(s-4)$ は以下のようになる。



問２　$F(s)=\int_0^s f(u)du$ は、$t=f(u)$ と t 軸、$u=s$ で囲まれている部分の面積より

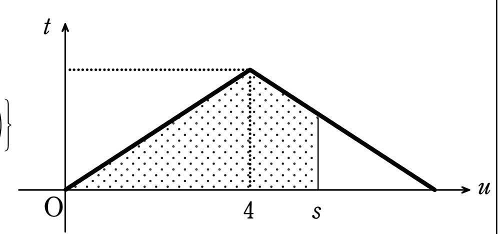
（ｉ）　$0\leqq s\leqq 4$ のとき

$$F(s)=\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s}{16}=\frac{s^2}{16}$$



（ii）　$4<s\leqq 8$ のとき

$$F(s)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(s-4)\left\{\frac{1}{4}+\left(-\frac{s}{16}+\frac{1}{2}\right)\right\}=-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{2}-1$$



（iii）　$s>8$ のとき

$$F(s)=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{1}{4}=1$$

（ｉ）～（iii）より

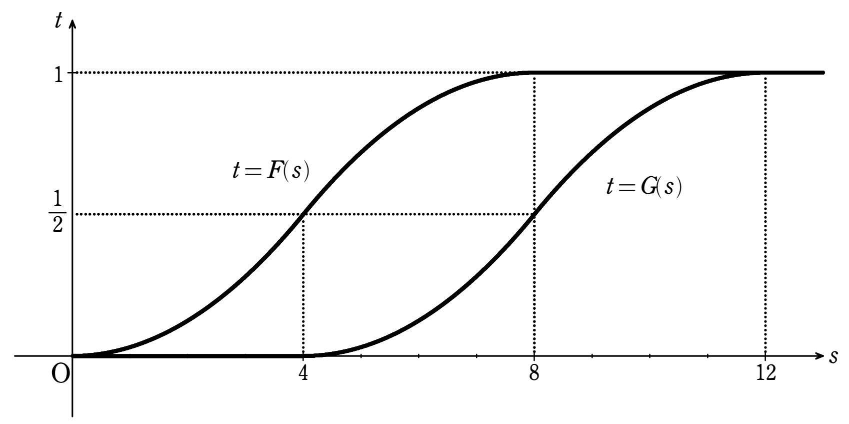
$$F(s)=\begin{cases}\dfrac{s^2}{32} & (0\leqq s\leqq 4)\\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{s}{2}-1 & (4<s\leqq 8)\\ 1 & (8<s)\end{cases}$$

$G(s)=\int_0^s f(u-4)du$ は、$t=f(u-4)$ と t 軸、$u=s$ で囲まれている部分の面積で、$t=f(u-4)$ は $t=f(u)$ を u 軸方向に $+4$ 平行移動しただけなので、$G(s)=F(s-4)$ となる。よって

$$G(s)=\begin{cases}0 & (0\leqq s\leqq 4)\\ \dfrac{(s-4)^2}{32} & (0<s-4\leqq 4)\\ -\dfrac{(s-4)^2}{32}+\dfrac{s-4}{2}-1 & (4<s-4\leqq 8)\\ 1 & (8<s-4)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & (0\leqq s\leqq 4)\\ \dfrac{(s-4)^2}{32} & (4<s\leqq 8)\\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{3}{4}s-\dfrac{7}{2} & (8<s\leqq 12)\\ 1 & (12<s)\end{cases}$$

以上より、グラフは以下のようになる。



問３　$G(s)$、$F(s)$ は各区間で単調増加であることを考慮して

（ｉ）　$0\leqq s\leqq 4$ のとき

$y=\dfrac{s^2}{32}$ より、$0\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$

よって、$x=0$ $\left(0\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}\right)$

（ii）　$4<s\leqq 8$ のとき

$s=4$ のとき、$(x、y)=\left(0、\dfrac{1}{2}\right)$

$s=8$ のとき、$(x、y)=\left(\dfrac{1}{2}、1\right)$

よって、$\left(0、\dfrac{1}{2}\right)$ と $\left(\dfrac{1}{2}、1\right)$ を結ぶ曲線で

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\right)\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{d}{ds}\left(\frac{-\frac{s}{16}+\frac{1}{2}}{\frac{s-4}{16}}\right)\cdot\frac{16}{s-4}=\frac{d}{ds}\left(\frac{-s+8}{s-4}\right)\cdot\frac{16}{s-4}=\frac{-4}{(s-4)^2}\cdot\frac{16}{s-4}=\frac{-64}{(s-4)^3}<0$$

より、上に凸の曲線となる。

（iii）　$8<s\leqq 12$ のとき

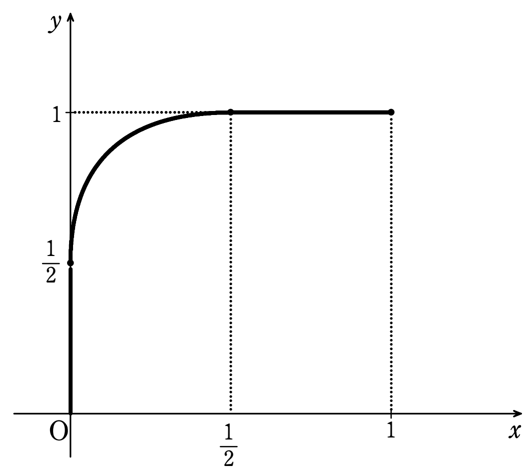
$$x=-\frac{s^2}{32}+\frac{3}{4}s-\frac{7}{2}=-\frac{(s-12)^2}{32}+1 \text{ より、} \frac{1}{2}<x\leqq 1$$

よって、$y=1$ $\left(\dfrac{1}{2}<x\leqq 1\right)$

（iv）　$12<s$ のとき

$(x、y)=(1、1)$

（ｉ）～（iv）より、グラフは以下のようになる。



別解　（ii）に関して

（ii）　$4<s\leqq 8$ のとき

$$x=\frac{(s-4)^2}{32}\quad\cdots\cdots①、\quad y=-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{2}-1\quad\cdots\cdots②$$

① より、$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$

このとき、$32x=(s-4)^2$

$s-4>0$ より

$$s-4=\sqrt{32x}$$

$$\therefore\quad s=4+4\sqrt{2x}\quad\cdots\cdots③$$

② より、$y=\dfrac{-s^2+16s}{32}-1=\dfrac{-(s-8)^2}{32}+1$

③を代入して

$$y=\frac{-(4\sqrt{2x}-4)^2}{32}+1$$

$$\therefore\quad y=-x+\sqrt{2x}+\frac{1}{2}$$

よって、$y'=-1+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}=\dfrac{1-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$

$y''=\dfrac{-1}{(2x)^{\frac{3}{2}}}$　より

増減表は、以下のようになる。

x	$\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	0
y''		$-$	
y	$\frac{1}{2}$	↗	1

これより、$\left(0、\dfrac{1}{2}\right)$と$\left(\dfrac{1}{2}、1\right)$を結ぶ上凸の曲線となる。

問４　問３の図において、(0、1) から曲線までの距離が最小となるのは、

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ $(4<s\leqq 8)$ の区間である。

このときの距離を L とすると

$$L^2=\{G(s)\}^2+\{F(s)-1\}^2$$
$$=\left\{\frac{(s-4)^2}{32}\right\}^2+\left(-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{2}-2\right)^2$$
$$=\frac{(s-4)^4}{32^2}+\frac{(s-8)^4}{32^2}\quad より$$

$$\frac{dL^2}{ds}=\frac{1}{32^2}\{4(s-4)^3+4(s-8)^3\}$$
$$=\frac{4}{32^2}\{(s-4)+(s-8)\}\{(s-4)^2-(s-4)(s-8)+(s-8)^2\}$$
$$=\frac{8}{32^2}(s-6)(s^2-12s+48)$$

よって、増減表は以下のようになる。

s	4		6		8
$\frac{dL^2}{ds}$		$-$	0	$+$	
L^2		↘	極小	↗	

以上より、$s=6$ で L は最小値をとる。

別解　問３の図において、(0、1) から曲線までの距離が最小となるのは　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$

$(4<s\leqq 8)$ の区間での法線が (0、1) を通るときである。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}=\frac{-s+8}{s-4}\quad より$$

法線は

$$y=-\left(\frac{s-4}{-s+8}\right)\left\{x-\frac{(s-4)^2}{32}\right\}-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{2}-1$$

となる。これが (0、1) を通るので

$$1=-\left(\frac{s-4}{-s+8}\right)\left\{-\frac{(s-4)^2}{32}\right\}-\frac{(s-8)^2}{32}+1$$

$$\therefore\quad \frac{s-4}{-s+8}\cdot(s-4)^2-(s-8)^2=0$$

$$\therefore\quad (s-4)^3+(s-8)^3=0$$

$$\therefore\quad \{(s-4)+(s-8)\}\{(s-4)^2-(s-4)(s-8)+(s-8)^2=0\}$$

$$\therefore\quad (s-6)(s^2-12s+48)=0$$

$s^2-12s+48=(s-6)^2+12>0$ より

$s=6$ のとき L は最小となる。

別解　$y=-x+\sqrt{2x}+\dfrac{1}{2}$ の利用

問３の図において、(0、1) から曲線までの距離が最小となるのは、$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ の区間である。このときの距離を L、曲線上の点を $\left(p、-p+\sqrt{2p}+\dfrac{1}{2}\right)$ $\left(0\leqq p\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$L^2=p^2+\left(-p+\sqrt{2p}+\frac{1}{2}-1\right)^2$$
$$=p^2+\left(-p+\sqrt{2p}-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=2p^2+3p-2p\sqrt{2p}-\sqrt{2p}+\frac{1}{4}\quad より$$

$$\frac{dL^2}{dp}=4p+3-3\sqrt{2p}-\frac{1}{\sqrt{2p}}$$
$$=\frac{4p\sqrt{2p}+3\sqrt{2p}-6p-1}{\sqrt{2p}}$$

$\sqrt{2p}=u$ とおくと

$$(分子)=2u^3-3u-3u^2-1$$
$$=(2u-1)(u^2-u+1)$$

となるので

$$\frac{dL^2}{dp}=\frac{(2\sqrt{2p}-1)(2p-\sqrt{2p}+1)}{\sqrt{2p}}$$

よって、増減表は以下のようになる。

p	0		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{dL^2}{dp}$		$-$	0	$+$	
L^2		↘	極小	↗	

以上より、$p=\dfrac{1}{8}$ のとき

つまり、$\dfrac{(s-4)^2}{32}=\dfrac{1}{8}$

$$\therefore\quad (s-4)^2=4$$
$$\therefore\quad s-4=\pm 2$$
$$\therefore\quad s=2、6$$

$4<s\leqq 8$ より、$s=6$ で L は最小値をとる。

別解　$y=-x+\sqrt{2x}+\dfrac{1}{2}$ の利用

問３の図において、(0、1) から曲線までの距離が最小となるのは、$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ の区間での法線が (0、1) を通るときである。

よって、接点を $\left(p、-p+\sqrt{2p}+\dfrac{1}{2}\right)$ $\left(0<p<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$y'=-1+\frac{1}{\sqrt{2x}}=\frac{1-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\quad より$$

法線は

$$y=-\frac{\sqrt{2p}}{1-\sqrt{2p}}(x-p)-p+\sqrt{2p}+\frac{1}{2}$$

となる。これが (0、1) を通るので

$$1=-\frac{\sqrt{2p}}{1-\sqrt{2p}}(-p)-p+\sqrt{2p}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad 1-\sqrt{2p}=p\sqrt{2p}+(1-\sqrt{2p})\left(-p+\sqrt{2p}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad 4p\sqrt{2p}-6p+3\sqrt{2p}-1=0$$

$$\therefore\quad (2\sqrt{2p}-1)(2p-\sqrt{2p}+1)=0$$

$2p-\sqrt{2p}+1=\left(\sqrt{2p}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より

$$2\sqrt{2p}-1=0$$

$$\therefore\quad p=\frac{1}{8}$$

よって、$\dfrac{(s-4)^2}{32}=\dfrac{1}{8}$

$$\therefore\quad (s-4)^2=4$$
$$\therefore\quad s-4=\pm 2$$
$$\therefore\quad s=2、6$$

$4<s\leqq 8$ より、$s=6$ で L は最小値をとる。