1 以下の文章の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ト}$ に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ。

実数の定数 a、$b\ (a>0)$ に対して、２次関数 $f(x)=3ax^2+2x+b$ が

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=0,\ \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=6$$

を満たすとき、$a=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$、$b=-\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である。

$$\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{キ}}{\pi}$$

$$\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

$$\int_0^1x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{コ}}{\pi}-\frac{\boxed{サ}}{\pi^{\boxed{シ}}}$$

であることを用いれば、定積分

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2dx$$

が最小となる定数 p、q の値は

$$p=\frac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}-\frac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}\pi^{\boxed{テ}}},\ q=\boxed{ト}$$

となる。

解説

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$ より

$$\int_{-1}^{1}(3ax^2+2x+b)dx=0$$

$$\therefore\ 2\int_0^1(3ax^2+b)dx=0$$

$$\therefore\ 2\Big[ax^3+bx\Big]_0^1=0$$

$$\therefore\ a+b=0\quad\cdots\cdots①$$

また、$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=6$ より

$$\int_{-1}^{1}(3ax^2+2x+b)^2dx=6$$

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}\{9a^2x^4+12ax^3+(6ab+4)x^2+4bx+b^2\}dx=6$$

$$\therefore\ 2\int_0^1\{9a^2x^4+(6ab+4)x^2+b^2\}dx=6$$

$$\therefore\ \left[\frac{9}{5}a^2x^5+\left(2ab+\frac{4}{3}\right)x^3+b^2x\right]_0^1=3$$

$$\therefore\ \frac{9}{5}a^2+2ab+\frac{4}{3}+b^2=3$$

$$\therefore\ 27a^2+30ab+15b^2=25\quad\cdots\cdots②$$

① より、$b=-a$

② に代入すると

$$27a^2-30a^2+15a^2=25$$

$$\therefore\ 12a^2=25$$

$$\therefore\ a=\pm\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$a>0$ より、$a=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

① より、$b=-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

$$\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\int_0^1\frac{1+\cos\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$\displaystyle\int_0^1x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ について

$\dfrac{\pi x}{2}=t$ とおくと、$\dfrac{\pi}{2}dx=dt$

$x:0\to1$ のとき、$t:0\to\dfrac{\pi}{2}$

よって、
$$\int_0^1x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2\cos t\cdot\frac{2}{\pi}dt$$
$$=\frac{8}{\pi^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,dt$$
$$=\frac{8}{\pi^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2(\sin t)'dt$$
$$=\frac{8}{\pi^3}\left\{\Big[t^2\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt\right\}$$
$$=\frac{8}{\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t(-\cos t)'dt\right\}$$
$$=\frac{8}{\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{4}-2\left(\Big[-t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right)\right\}$$
$$=\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\pi^2}{4}-2\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^3}$$

以上より

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\pi^2}{4}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+p^2\{f(x)\}^2+q^2-p\pi\cdot f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right.$$
$$\left.+2pqf(x)-q\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx+p^2\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx+2\int_0^1q^2dx$$
$$-p\pi\int_{-1}^{1}(3ax^2+2x+b)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
$$+2pq\int_{-1}^{1}f(x)dx-2q\pi\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{2}+6p^2+2q^2-2p\pi\int_0^1(3ax^2+b)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx-2q\pi\cdot\frac{2}{\pi}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}+6p^2+2q^2-6ap\pi\int_0^1x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx-2bp\pi\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx-4q$$
$$=\frac{\pi^2}{4}+6p^2+2q^2-6ap\pi\left(\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^3}\right)-2bp\pi\cdot\frac{2}{\pi}-4q$$
$$=\frac{\pi^2}{4}+6p^2+2q^2-10\sqrt{3}p\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{\pi^2}\right)-4q$$
$$=6\left\{p-5\sqrt{3}\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3\pi^2}\right)\right\}^2+2(q-1)^2+\frac{\pi^2}{4}+6\cdot25\cdot3\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3\pi^2}\right)^2-2$$

よって、$p=5\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{4}{3\pi^2}\right)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}-\dfrac{20\sqrt{3}}{3\pi^2}$、$q=1$ のとき、最小をとる。

2 O を原点とする xyz 空間において以下の各問いに答えよ。

問1　点 $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り、ベクトル $\vec{n}=(-2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3})$ に垂直な平面 α の方程式を求めよ。

問2　ベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ と問1の $\vec{n}$ とのなす角 θ を求めよ。

問3　連立不等式 $z \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 9$ で表される図形を、問1の平面 α によって2つの部分に分割するとき、点 $(0,\ 0,\ 3)$ を含む部分の体積を求めよ。

解説

問1　点 $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を A とすると

平面 α は、A を通り $\vec{n}=(-2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3})$ に垂直な平面より

$$-2(x-1)+\sqrt{5}\left(y+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(z-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$$\therefore\quad 2x-\sqrt{5}\,y-\sqrt{3}\,z=0$$

参考　A $(a,\ b,\ c)$ を通り、$\vec{n}=(p,\ q,\ r)$ に垂直な平面の方程式は

$$p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$$

となる。

別解　平面 α 上の点を P $(x,\ y,\ z)$、点 $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を A とすると、

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$

よって

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ z-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\quad -2(x-1)+\sqrt{5}\left(y+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(z-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$$\therefore\quad 2x-\sqrt{5}\,y-\sqrt{3}\,z=0$$

問2　$\vec{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\vec{n}\cdot\vec{c}=|\vec{n}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\sqrt{4+5+3}\cdot\sqrt{1}\cdot\cos\theta$$

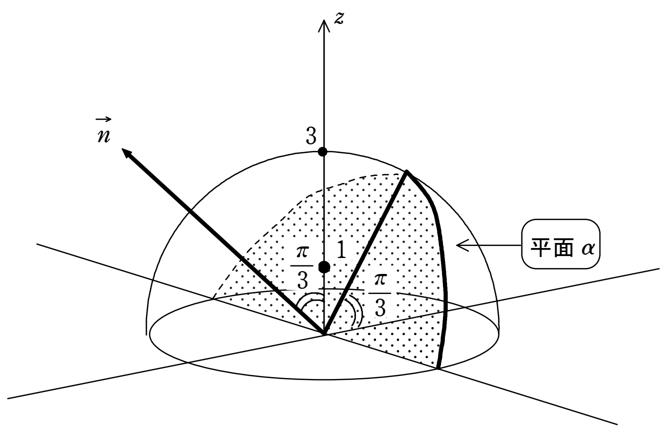
$$\therefore\quad \sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より、$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

問3　$z \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 9$ で表される領域は、原点を中心とする半径3の半球でこれを平面 α で2分割したとき、$(0,\ 0,\ 1)$ と $\vec{n}$ とのなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ より、平面 α と平面 $z=0$ のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ となる。よって、$(0,\ 0,\ 3)$ を含む立体は、球を3分割したものになる。よって、求める体積は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3\times\frac{1}{3}=12\pi$$



3 正の実数 t、k に対して、座標平面上の点 $\mathrm{T}_t(k)$ を次の式で定める。

$$\mathrm{T}_t(k)=\left(\frac{k}{1+t^2k^2}、\frac{tk^2}{1+t^2k^2}\right)$$

また、各 k に対して、t が正の実数全体を動くときの $\mathrm{T}_t(k)$ の描く軌跡を $C(k)$ とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問１　次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ に適する数または式を解答欄に記入せよ。答えのみでよい。

$C(k)$ は点 $\left(\boxed{ア}、\boxed{イ}\right)$ を中心とする、半径が $\boxed{ウ}$ の円の一部である。

問２　各 t に対して、$\mathrm{T}_t\left(\frac{1}{2}\right)$ における $C\left(\frac{1}{2}\right)$ の法線を $\ell_1(t)$、点 $\mathrm{T}_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $\ell_2(t)$ とする。このとき、２直線 $\ell_1(t)$、$\ell_2(t)$ の方程式をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問３　問２の２直線 $\ell_1(t)$、$\ell_2(t)$ の交点 $\mathrm{P}(t)$ の座標を求めよ。答えのみでよい。

問４　t が正の実数全体を動くとき、問３で定めた点 $\mathrm{P}(t)$ が描く曲線は、x 軸上に２つの焦点をもつ楕円の一部であることを示し、その焦点の座標、長軸の長さ、短軸の長さをそれぞれ求めよ。

（解説）

問１　$\mathrm{T}_t(k)=\left(\frac{k}{1+t^2k^2}、\frac{tk^2}{1+t^2k^2}\right)$ より

$$x=\frac{k}{1+t^2k^2}\ \cdots\cdots ①、\ y=\frac{tk^2}{1+t^2k^2}\ \cdots\cdots ②$$

$t>0$、$k>0$ より、$x>0$

よって、$\frac{②}{①}$ より

$$\frac{y}{x}=tk$$

$$\therefore\quad t=\frac{y}{kx}$$

① に代入して

$$x=\frac{k}{1+\left(\frac{y}{kx}\right)^2\cdot k^2}$$

$$\therefore\quad \left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}\cdot x=k$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=kx$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{k}{2}\right)^2+y^2=\frac{k^2}{4}$$

よって、$C(k)$ は点 $\left(\frac{k}{2}、0\right)$ を中心とする半径 $\frac{k}{2}$ の円の一部。

問２　$\mathrm{T}_t\left(\frac{1}{2}\right)$ における $C\left(\frac{1}{2}\right)$ の法線 $\ell_1(t)$ は、$\mathrm{T}_t\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{4+t^2}、\frac{t}{4+t^2}\right)$ と

円の中心 $\left(\frac{1}{4}、0\right)$ を結んだ直線より

$t\neq 2$ のとき $\left(t=2\text{ のとき、}x=\frac{1}{4}\right)$

$$y=\frac{\frac{t}{4+t^2}}{\frac{2}{4+t^2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore\quad y=\frac{4t}{4-t^2}\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore\quad 4tx-(4-t^2)y-t=0\quad\left(t=2\text{ のとき、}x=\frac{1}{4}\text{ になる}\right)$$

よって、直線 $\ell_1(t):4tx-(4-t^2)y-t=0\ \cdots\cdots ③$

また、点 $\mathrm{T}_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $\ell_2(t)$ は、$\mathrm{T}_t(1)=\left(\frac{1}{1+t^2}、\frac{t}{1+t^2}\right)$ と

円の中心 $\left(\frac{1}{2}、0\right)$ を結んだ直線より

$t\neq 1$ のとき $\left(t=1\text{ のとき、}x=\frac{1}{2}\right)$

$$y=\frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad y=\frac{2t}{1-t^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad 2tx-(1-t^2)y-t=0\quad\left(t=1\text{ のとき、}x=\frac{1}{2}\text{ になる}\right)$$

よって、直線 $\ell_2(t):2tx-(1-t^2)y-t=0\ \cdots\cdots ④$

問３　２直線 $\ell_1(t)$、$\ell_2(t)$ の交点より

③－④×２から

$$(t^2+2)y-t=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{t}{t^2+2}$$

④ に代入して

$$2tx-(1-t^2)\cdot\frac{t}{t^2+2}-t=0$$

$t>0$ より、$x=\frac{3}{2(t^2+2)}$

よって、$\mathrm{P}(t)$ の座標は

$$\left(\frac{3}{2(t^2+2)}、\frac{t}{t^2+2}\right)$$

問４　$x=\frac{3}{2(t^2+2)}\ \cdots\cdots ⑤$、$y=\frac{t}{t^2+2}\ \cdots\cdots ⑥$

$t>0$、$k>0$ より、$x>0$

よって、$\frac{⑥}{⑤}$ より

$$\frac{y}{x}=\frac{2}{3}t$$

$$\therefore\quad t=\frac{3y}{2x}$$

⑤ に代入して

$$x=\frac{3}{2\left\{\left(\frac{3y}{2x}\right)^2+2\right\}}$$

$$\therefore\quad 2x\left(\frac{9y^2}{4x^2}+2\right)=3$$

$$\therefore\quad 9y^2+8x^2=6x$$

$$\therefore\quad \frac{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{9}{64}}+\frac{y^2}{\frac{1}{8}}=1$$

よって、 $\mathrm{P}(t)$ が描く曲線は、$\left(\frac{1}{4}、0\right)$、$\left(\frac{1}{2}、0\right)$ を焦点とする楕円で

長軸の長さは $\frac{3}{4}$、短軸の長さは $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

4 初期時刻 0 で白球が 3 個あり、以下の規則で定まる確率に従って球の色が白から黒、また黒から白に変化するものとする。以下では、各時刻 n $(n=0、1、2、3、\cdots\cdots)$ での白球の個数を $w(n)$、黒球の個数を $b(n)$ と表し ($w(n)+b(n)=3$)、また、実数 x は $0<x<1$ を満たすとする。

規則 1 ：$w(n)=3$ または $w(n)=2$ であるとき、時刻 n での各白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{1}{3}$ の確率で黒玉となり、$\dfrac{2}{3}$ の確率で白球のままである。また、時刻 n での黒球は時刻 $n+1$ では確率 x で白球となり、確率 $1-x$ で黒球のままである。

規則 2 ：$w(n)=1$ であるとき、時刻 n での白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{2}{3}$ の確率で黒玉となり、$\dfrac{1}{3}$ の確率で白球のままである。また、時刻 n での各黒球は規則 $n+1$ では確率 1 で黒玉のままである。

規則 3 ：$w(n)=0$ であるとき、時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである。

各時刻 n $(n=0、1、2、3、\cdots\cdots)$ に対して、$w(n)=3$ である確率を p_n、$w(n)=2$ である確率を q_n、$w(n)=1$ である確率を r_n とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問 1　p_1、q_1 をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 2　次の連立漸化式が成り立つように、$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に適する、n に無関係な数または式を解答欄に記入せよ。導出過程についても説明せよ。

$$\begin{cases} p_{n+1}=\boxed{\text{ア}}\,p_n+\boxed{\text{イ}}\,q_n \\ q_{n+1}=\boxed{\text{ウ}}\,p_n+\boxed{\text{エ}}\,q_n \end{cases} \quad (n=0、1、2、3、\cdots\cdots)$$

問 3　次の連立漸化式が成り立つような実数 α、β (ただし、$\alpha<\beta$) の組を求め、x を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\begin{cases} p_{n+2}-(\alpha+\beta)p_{n+1}+\alpha\beta\, p_n=0 \\ q_{n+2}-(\alpha+\beta)\, q_{n+1}+\alpha\beta\, q_n=0 \end{cases} \quad (n=0、1、2、3、\cdots\cdots)$$

問 4　数列 $\{p_n\}$、$\{q_n\}$ の一般項を関数 $F(x)$、$G(x)$、$H(x)$、$I(x)$ を用いて

$$\begin{cases} p_n=F(x)\,\alpha^n+G(x)\,\beta^n \\ q_n=H(x)\,\alpha^n+I(x)\,\beta^n \end{cases} \quad (n=0、1、2、3、\cdots\cdots)$$

と表したとき、$F(x)$、$G(x)$、$H(x)$、$I(x)$ を x の関数としてそれぞれ具体的に求めよ。答えのみでよい。

問 5　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$ が存在し、かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}<1$ が成り立つための x に対する必要十分条件を求めよ。

解説

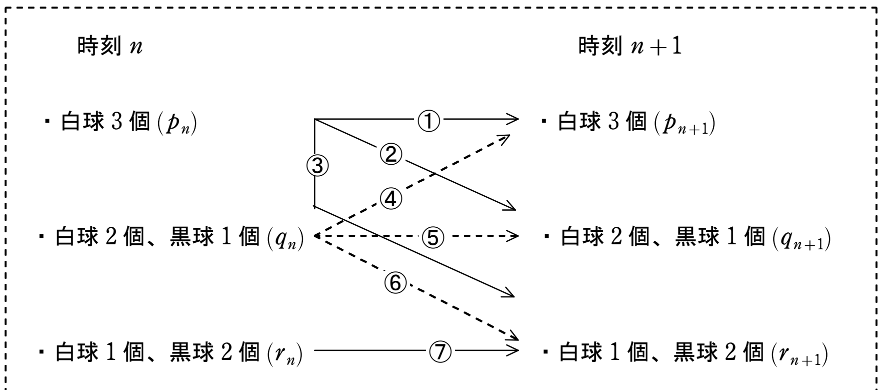
問 1　時刻 1 で、白球 3 個すべてが白球のままである確率 p_1 は

$$p_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

時刻 1 で、白球 3 個のうち、1 個が黒球となる確率 q_1 は

$$q_1={}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

問 2　時刻 n から時刻 $n+1$ への球の色の状態推移は、以下の図のようになる。



また、① ～ ⑦ の確率は以下のようになる。

①：$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$　　②：${}_3C_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

③：${}_3C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$　　④：$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2x=\dfrac{4}{9}x$

⑤：$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2(1-x)+{}_2C_1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)+x=\dfrac{4}{9}(1-x)+\dfrac{4}{9}x=\dfrac{4}{9}$

⑥：${}_2C_1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot(1-x)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot x=\dfrac{4}{9}(1-x)+\dfrac{x}{9}=\dfrac{4-3x}{9}$

⑦：$\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot 1^2=\dfrac{1}{3}$

よって

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{8}{27}p_n+\dfrac{4}{9}x\cdot q_n & \cdots\cdots\cdots(a) \\ q_{n+1}=\dfrac{4}{9}p_n+\dfrac{4}{9}q_n & \cdots\cdots\cdots(b) \\ r_{n+1}=\dfrac{2}{9}p_n+\dfrac{4-3x}{9}\cdot q_n+\dfrac{1}{3}r_n & \cdots\cdots(c) \end{cases}$$

となる。

よって、(a)、(b) より

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{8}{27}p_n+\dfrac{4}{9}x\cdot q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{4}{9}p_n+\dfrac{4}{9}q_n \end{cases} \quad (n=0、1、2、3、\cdots\cdots)$$

問 3　(a) より

$$\frac{4}{9}q_n=\frac{1}{x}p_{n+1}-\frac{8}{27x}p_n$$

$$\therefore\quad q_{n+1}=\frac{9}{4x}p_{n+2}-\frac{2}{3x}p_{n+1}$$

(b) に代入して

$$\frac{9}{4x}p_{n+2}-\frac{2}{3x}p_{n+1}=\frac{4}{9}p_n+\frac{1}{x}p_{n+1}-\frac{8}{27x}p_n$$

$$\therefore\quad 243p_{n+2}-180p_{n+1}+(-48x+32)p_n=0$$

α、β は、t に関する二次方程式：$243t^2-180t+(-48x+32)=0$ の 2 解より

$$t=\frac{10\pm2\sqrt{36x+1}}{27}$$

$\alpha<\beta$ より

$$\alpha=\frac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}、\beta=\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}$$

問 4　問 3 より

$$\begin{cases} p_{n+2}-(\alpha+\beta)p_{n+1}+\alpha\beta\, p_n=0 & \cdots\cdots(d) \\ q_{n+2}-(\alpha+\beta)\, q_{n+1}+\alpha\beta\, q_n=0 & \cdots\cdots(e) \end{cases}$$

(d) より、$\begin{cases} p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n) \\ p_{n+2}-\beta p_{n+1}=\alpha(p_{n+1}-\beta p_n) \end{cases}$

$$\therefore\quad \begin{cases} p_{n+1}-\alpha p_n=\beta^n(p_1-\alpha p_0) \\ p_{n+1}-\beta p_n=\alpha^n(p_1-\beta p_0) \end{cases}$$

辺々を引いて

$$(\beta-\alpha)p_n=\beta^n(p_1-\alpha p_0)-\alpha^n(p_1-\beta p_0)$$

$\alpha<\beta$ より

$$p_n=\frac{\beta^n(p_1-\alpha p_0)-\alpha^n(p_1-\beta p_0)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\beta^n\left(\dfrac{8}{27}-\dfrac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}\cdot1\right)-\alpha^n\left(\dfrac{8}{27}-\dfrac{10+2\sqrt{36x+2}}{27}\cdot1\right)}{\dfrac{4\sqrt{36x+1}}{27}}$$

$(\because\ p_0=1)$

$$=\frac{\sqrt{36x+1}+1}{2\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}\beta^n$$

よって、$F(x)=\dfrac{\sqrt{36x+1}+1}{2\sqrt{36x+1}}$、$G(x)=\dfrac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}$

(e) についても同様にして

$$q_n=\frac{\beta^n(q_1-\alpha q_0)-\alpha^n(q_1-\beta q_0)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\beta^n\times\dfrac{4}{9}-\alpha^n\times\dfrac{4}{9}}{\dfrac{4\sqrt{36x+1}}{27}}\quad(\because\ q_0=0)$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\frac{3}{\sqrt{36x+1}}\beta^n$$

よって、$H(x)=-\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}$、$I(x)=\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}$

問 5　(c) より

$$r_{n+1}=\frac{2}{9}p_n+\frac{4-3x}{9}\cdot q_n+\frac{1}{3}r_n$$

$$=\frac{2}{9}\{F(x)\,\alpha^n+G(x)\,\beta^n\}+\frac{4-3x}{9}\cdot\{H(x)\,\alpha^n+I(x)\,\beta^n\}+\frac{1}{3}r_n$$

$$=\frac{1}{3}r_n+\left\{\frac{2}{9}F(x)+\frac{4-3x}{9}\cdot H(x)\right\}\alpha^n+\left\{\frac{2}{9}G(x)+\frac{4-3x}{9}\cdot I(x)\right\}\beta^n$$

ここで、$J(x)=\dfrac{2}{9}F(x)+\dfrac{4-3x}{9}\cdot H(x)$、$K(x)=\dfrac{2}{9}G(x)+\dfrac{4-3x}{9}\cdot I(x)$ とおくと

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+J(x)\cdot\alpha^n+K(x)\cdot\beta^n\quad\cdots\cdots(f)$$

$r_n=A\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+B\cdot\alpha^n+C\cdot\beta^n$ (A、B、C は定数)$\cdots\cdots(g)$　とおくと

(f) に代入して

$$A\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+B\cdot\alpha^{n+1}+C\cdot\beta^{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{A\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+B\cdot\alpha^n+C\cdot\beta^n\right\}+J(x)\cdot\alpha^n+K(x)\cdot\beta^n$$

$$=A\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\left\{\frac{1}{3}B+J(x)\right\}\cdot\alpha^n+\left\{\frac{1}{3}C+K(x)\right\}\cdot\beta^n$$

両辺比較して

$$\begin{cases} \alpha B=\dfrac{1}{3}B+J(x) \\ \beta C=\dfrac{1}{3}C+K(x) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} B=\dfrac{3J(x)}{3\alpha-1} \\ C=\dfrac{3K(x)}{3\beta-1} \end{cases}$$

また、(g) において、$n=0$ とすると

$$0=A+B+C$$

$$\therefore \quad A=-B-C$$

よって、(f) より

$$r_n=-(B+C)\left(\frac{1}{3}\right)^n+B\cdot\alpha^n+C\cdot\beta^n$$

したがって

$$\frac{r_n}{q_n}=\frac{-(B+C)\left(\frac{1}{3}\right)^n+B\cdot\alpha^n+C\cdot\beta^n}{H(x)\,\alpha^n+I(x)\,\beta^n}$$

ここで、$|\alpha|<\beta$、$0<x<1$ より

$$\beta=\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}>\frac{10+2\sqrt{36\cdot 0+1}}{27}=\frac{12}{27}>\frac{1}{3}$$

となるので、$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$、$\left|\dfrac{1}{3\beta}\right|<1$ となる。

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-(B+C)\left(\frac{1}{3\beta}\right)^n+B\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+C}{H(x)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+I(x)}$$

$$=\frac{C}{I(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{3\left\{\frac{2}{9}G(x)+\frac{4-3x}{9}\cdot I(x)\right\}}{3\beta-1}}{I(x)}$$

$$=\frac{3}{3\beta-1}\cdot\left\{\frac{2}{9}\cdot\frac{G(x)}{I(x)}+\frac{4-3x}{9}\right\}$$

$$=\frac{3}{3\cdot\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}-1}\cdot\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{\frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}}{\frac{3}{\sqrt{36x+1}}}+\frac{4-3x}{9}\right)$$

$$=\frac{27}{1+2\sqrt{36x+1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{36x+1}-1}{27}+\frac{4-3x}{9}\right)$$

したがって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}<1$ となる条件は

$$\frac{27}{1+2\sqrt{36x+1}}\left(\frac{\sqrt{36x+1}-1}{27}+\frac{4-3x}{9}\right)<1$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{36x+1}-1}{27}+\frac{4-3x}{9}<\frac{1+2\sqrt{36x+1}}{27}$$

$$\therefore \quad \sqrt{36x+1}-1+12-9x<1+2\sqrt{36x+1}$$

$$\therefore \quad \sqrt{36x+1}>10-9x$$

$0<x<1$ より、両辺正より 2 乗して

$$36x+1>(10-9x)^2$$

$$\therefore \quad 9x^2-24x+11<0$$

$$\therefore \quad \frac{4-\sqrt{5}}{3}<x<\frac{4+\sqrt{5}}{3}$$

$0<x<1$ より、$\dfrac{4-\sqrt{5}}{3}<x<1$