1 (1) 正の整数 m と n について、等式 $\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{35}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$ が成立するとき

$m=\boxed{アイ}$ である。

(2) すべての面が四角形となっている凸多面体Pについて考える。凸多面体Pの面の数が29のとき、Pの辺の数は $\boxed{ウエ}$ であり、Pの頂点の数は $\boxed{オカ}$ である。

(3) 文字 x についての多項式 A は x^3-2x^2+3 で割ると $4x^2+5x+33$ 余る。このとき A を x^2-3x+3 で割った余りは $\boxed{キク}\,x+\boxed{オカ}$ である。

(4) 整数 n は9で割ると4余り、11で割ると7余る。このとき、n を99で割った余りは $\boxed{サシ}$ である。

(5) 関数 $f(x)=-|x|^{\sqrt{6}}$ の $x=\sqrt{6}\cdot f(\sqrt{6})$ における微分係数は

$$f'(\sqrt{6}\cdot f(\sqrt{6}))=\boxed{スセソ}$$

である。

解説

(1)
$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{35}}&=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{12+2\sqrt{35}}}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\\&=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}\\&=\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})\\&=\sqrt{14}-\sqrt{10}\end{aligned}$$

(2) 各面が四角形で、1つの辺は2つの四角形が共有するので

$$(\text{辺の数})=\frac{4\times 29}{2}=58$$

また、オイラーの多面体定理より

$(\text{頂点の数})-(\text{辺の数})+(\text{面の数})=2$

が成り立つ。

よって、立体Pの面の数が29より

$(\text{頂点の数})-58+29=2$

∴ $(\text{頂点の数})=31$

(3) A を x^3-2x^2+3 で割ったときの商を $Q_{(x)}$ とすると

$$\begin{aligned}A&=(x^3-2x^2+3)\cdot Q(x)+4x^2+5x+33\\&=(x+1)(x^2-3x+3)\cdot Q(x)+4(x^2-3x+3)+17x+21\\&=(x^2-3x+3)\{(x+1)\cdot Q(x)+4\}+17x+21\end{aligned}$$

よって、A を x^2-3x+3 で割った余りは、$17x+21$

別解 $A=A(x)$、$x^2-3x+3=0$ の解の一つを、t（虚数）とする。

このとき、$t^2-3t+3=0$ より、$t^2=3t+3$ ………① が成り立つ。

A を x^3-2x^2+3 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$\begin{aligned}A(x)&=(x^3-2x^2+3)\cdot Q(x)+4x^2+5x+33\\&=(x+1)(x^2-3x+3)\cdot Q(x)+4x^2+5x+33\quad\cdots\cdots\text{②}\end{aligned}$$

A を x^2-3x+3 で割ったときの商を $Q_1(x)$、余りを $ax+b$（a、b は実数）とすると

$$A(x)=(x^2-3x+3)\cdot Q_1(x)+ax+b\quad\cdots\cdots\text{③}$$

②、③に $x=t$ を代入して

$4t^2+5t+33=at+b$

∴ $4(3t-3)+5t+33=at+b$ （∵①）

∴ $17t+21=at+b$

a、b は実数で、t は虚数より、$a=17$、$b=21$

よって、A を x^2-3x+3 で割った余りは、$17x+21$

(4) 整数 n は9で割ると4余り、11で割ると7余る数より

$n=9p+4=11q+7$（p、q は整数）

よって、$9p-11q=3$ ………①

$p=4$、$q=3$ は①を満たすので

$9\cdot 4-11\cdot 3=3$ ………②

①−②より

$9(p-4)-11(q-3)=0$

∴ $9(p-4)=11(q-3)$

9と11は互いに素より

$$\begin{cases}p-4=11k\\q-3=11k\end{cases}\quad(k\text{ は整数})$$

$$\therefore\ \begin{cases}p=11k+4\\q=11k+3\end{cases}$$

これより、$n=9(11k+4)+4$

$=99k+40$

よって、n を99で割った余りは40

別解 穴埋め用

11で割ると7余る99以下の整数は

……、7、18、29、40、51、62、73、84、95

このうち、9で割ると4余る数は、40

(5)
$$\begin{aligned}f(\sqrt{6})&=-|\sqrt{6}|^{\sqrt{6}}\\&=-(\sqrt{6})^{\sqrt{6}}\ (<0)\ \text{より}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{6}\cdot f(\sqrt{6})\\&=\sqrt{6}\cdot\{-(\sqrt{6})^{\sqrt{6}}\}\\&=-(\sqrt{6})^{\sqrt{6}+1}\ (<0)\end{aligned}$$

よって、$x<0$ において、$f(x)=-(-x)^{\sqrt{6}}$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=-(-\sqrt{6})\cdot(-x)^{\sqrt{6}-1}\\&=\sqrt{6}\cdot(-x)^{\sqrt{6}-1}\end{aligned}$$

よって、
$$\begin{aligned}f'(\sqrt{6}\cdot f(\sqrt{6}))&=\sqrt{6}\cdot\{(\sqrt{6})^{\sqrt{6}+1}\}^{\sqrt{6}-1}\\&=\sqrt{6}\cdot(\sqrt{6})^5\\&=216\end{aligned}$$

2 関数 $f(x)=3\cos\frac{x}{9}+4\sin\frac{x}{12}$ について考える。関数 $3\cos\frac{x}{9}$ のすべての正の周期からなる集合を A とする。すなわち

$$A=\left\{p \mid p>0 \text{ かつすべての実数 } x \text{ について } 3\cos\frac{x+p}{9}=3\cos\frac{x}{9}\right\}$$

とする。同様に、関数 $4\sin\frac{x}{12}$ のすべての正の周期からなる集合を B とし、$f(x)$ のすべての正の周期からなる集合を C とする。

集合 A の要素のうち最小の要素は $\boxed{\text{アイ}}\pi$ である。また、集合 $A\cap B$ の要素のうち最小の要素を p_0 とすると、$p_0=\boxed{\text{ウエ}}\pi$ である。

集合 $A\cap B$ の要素 p については、すべての実数 x について

$$3\cos\frac{x+p}{9}=3\cos\frac{x}{9} \text{ かつ } 4\sin\frac{x+p}{12}=4\sin\frac{x}{12}$$

が成立するので、すべての実数 x について

$$f(x+p)=3\cos\frac{x+p}{9}+4\sin\frac{x+p}{12}=3\cos\frac{x}{9}+4\sin\frac{x}{12}=f(x)$$

が成立し、$p\in C$ となる。したがって、$A\cap B$ $\boxed{\text{(あ)}}$ C が示された。

関数 $f(x)$ の最大値 M とすると $M=\boxed{\text{オ}}$ であり、$f(x)=M$ となる最小の実数 x を c とすると $c=\boxed{\text{カキ}}\pi$ である。また $f(a)=M$ となる実数 a に対して整数 k があり $a=c+kp_0$ となるので $A\cap B=C$ が成立する。

（問）次の⓪～⑨ の記号のうち、上記の空欄 $\boxed{\text{(あ)}}$ に当てはまる最も適切な記号は $\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ $\cap$　① $\cup$　② $\leqq$　③ $\geqq$　④ $\in$
⑤ $\ni$　⑥ $\subset$　⑦ $\supset$　⑧ $\Rightarrow$　⑨ $\perp$

解説

関数 $3\cos\frac{x}{9}$ の正の周期は、$9\times 2k\pi$ (k：自然数) より

集合 A は

$$A=\{18k\pi \mid k \text{ は自然数}\}=\{18\pi、36\pi、54\pi、72\pi、\cdots\cdots\}$$

となる。

よって、A の要素のうち最小のものは、18π

同様に、関数 $4\sin\frac{x}{12}$ の正の周期は、$12\times 2\ell\pi$ (ℓ：自然数) より

集合 B は

$$B=\{24\ell\pi \mid \ell \text{ は自然数}\}=\{24\pi、48\pi、72\pi、\cdots\cdots\}$$

となる。

よって、18 と 24 の最小公倍数が 72 であるから

集合 $A\cap B$ は

$$A\cap B=\{72m\pi \mid m \text{ は自然数}\}=\{72\pi、144\pi、216\pi、\cdots\cdots\}$$

となる。

よって、$A\cap B$ の要素のうち最小の要素 p_0 は、$p_0=72\pi$

また、問題文より

$p\in A\cap B$ ならば $p\in C$ より、$p\in A\cap B$ は $p\in C$ に含まれる。

よって、$A\cap B\subset C$ となる。

$f(x)$ は

$$\cos\frac{x}{9}=1 \text{ かつ、} \sin\frac{x}{12}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる x が存在するとき、最大値 7 となる。

よって、$\begin{cases}\frac{x}{9}=2i\pi\\ \frac{x}{12}=\frac{\pi}{2}+2j\pi\end{cases}$ （i、j は整数）

$\therefore \begin{cases}x=18i\pi\\ x=6\pi+24j\pi\end{cases}$

よって、$18i\pi=6\pi+24j\pi$

$\therefore\ 3i-4j=1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$

$i=3$、$j=2$ は ① を満たすので

$$3\cdot 3-4\cdot 2=1 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

②－③ より

$$3(i-3)-4(j-2)=0$$

$$\therefore\ 3(i-3)=4(j-2)$$

3 と 4 は互いに素より

$\begin{cases}i-3=4n\\ j-2=3n\end{cases}$ （n は整数）

$\therefore \begin{cases}i=4n+3\\ j=3n+2\end{cases}$

よって、$x=18(4n+3)\pi=54\pi+72n\pi$

これより、① を同時に満たす x は存在するので

$f(x)$ の最大値 M は、$M=7$ となる。

これより、$f(x)=M$ となる最小の正の実数 c は、$c=54\pi$

3 平面上に三点O、A、Bがあり

$$\mathrm{OA}=7,\ \mathrm{OB}=8,\ \mathrm{AB}=9$$

となっている。

正の実数 t に対して動点Pを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる点とし、点Pから直線OAに下ろした垂線と直線OAとの交点をQとする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{アイ}$ である。

(2)　線分OPの長さの最小値は $\boxed{ウエ}$ である。

(3)　線分OQの長さの最小値は $\boxed{オ}$ である。

解説

(1)　△OABで余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$$\therefore\ 81=49+64-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=16$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=t^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{t^2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=49t^2+32+\frac{64}{t^2}\end{aligned}$$

$49t^2>0$、$\frac{64}{t^2}>0$ より、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=49t^2+32+\frac{64}{t^2}\geqq2\sqrt{49t^2\cdot\frac{64}{t^2}}+32=144$$

等号は、$49t^2=\frac{64}{t^2}$ のとき

つまり、$t^4=\frac{64}{49}$

$$\therefore\ t^2=\frac{8}{7}$$

$t>0$ より、$t=\frac{2\sqrt{14}}{7}$ のとき成立する。

よって、$t=\frac{2\sqrt{14}}{7}$ のとき、$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小値 $\sqrt{144}=12$ となる。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (k は実数) とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$\therefore\ (\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$\therefore\ \left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$\therefore\ (k-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$\therefore\ 49(k-t)-\frac{16}{t}=0$$

$$\therefore\ k=t+\frac{16}{49t}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t+\frac{16}{49t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|&=\left|t+\frac{16}{49t}\right|\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\\&=\left(t+\frac{16}{49t}\right)\cdot7\quad(\because\ t>0)\\&=7t+\frac{16}{7t}\end{aligned}$$

$7t>0$、$\frac{16}{7t}>0$ より、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=7t+\frac{16}{7t}\geqq2\sqrt{7t\cdot\frac{16}{7t}}=8$$

等号は、$7t=\frac{16}{7t}$ のとき

つまり、$t^2=\frac{16}{49}$

$t>0$ より、$t=\frac{4}{7}$ のとき成立する。

よって、$t=\frac{4}{7}$ のとき、$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ は最小値8となる。

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)}{49}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{t|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{49}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{1}{49}\left(49t+\frac{16}{t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

以下、前の解答と同じより省略。

4 四次方程式

$$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(※)$$

について考える。$x=0$ は解ではないので、解 x に対して $y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと、等式

$$y^2+\boxed{アイ}\,y+\boxed{ウエ}=0$$

が成立する。

四次方程式 (※) の四つの解を α、β、γ、δ とすると

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\boxed{オカキ}$$

であり

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\boxed{クケ}$$

であり

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=\boxed{コサシス}$$

である。

解説

$x\neq 0$ より、(※) を x^2 で割って

$$x^2+11x+31+\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+29=0$$

よって、$y^2+11y+29=0$

この方程式の解を p、q とすると

解と係数の関係より

$$\begin{cases} p+q=-11 \\ pq=29 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

また、四次方程式 (※) の四つの解が α、β、γ、δ より、(※) は

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0 \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

と因数分解できる。

② を展開して (※) と x の係数を比較すると

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-11 \quad\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで、p に対応する x を α、β、q に対応する x を γ、δ とすると

$$\begin{cases} p=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\beta+\dfrac{1}{\beta} \\ q=\gamma+\dfrac{1}{\gamma}=\delta+\dfrac{1}{\delta} \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つ。

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}&=(p-\alpha)+(p-\beta)+(q-\gamma)+(q-\delta) \quad (\because ④)\\ &=2(p+q)-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\\ &=2\cdot(-11)-(-11) \quad (\because ①、③)\\ &=-11\end{aligned}$$

また、④ から

方程式 $p=x+\dfrac{1}{x}$ の解が $x=\alpha$、β より、$x^2-px+1=0$ の解が $x=\alpha$、β となる。

よって、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=p \\ \alpha\beta=1 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様にして、方程式 $q=x+\dfrac{1}{x}$ の解が $x=\gamma$、δ より

$$\begin{cases} \gamma+\delta=q \\ \gamma\delta=1 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots ⑥$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\ &=p^2-2\cdot1+q^2-2\cdot1 \quad (\because ⑤、⑥)\\ &=p^2+q^2-4\\ &=(p+q)^2-2pq-4\\ &=(-11)^2-2\cdot29-4 \quad (\because ①)\\ &=59\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)\\ &=p^3-3\cdot1\cdot p+q^3-3\cdot1\cdot q \quad (\because ⑤、⑥)\\ &=p^3+q^3-3(p+q)\\ &=(p+q)^3-3pq(p+q)-3(p+q)\\ &=(p+q)\{(p+q)^2-3(pq+1)\}\\ &=(-11)\{(-11)^2-3(29+1)\} \quad (\because ①)\\ &=-341\end{aligned}$$

別解　② を展開して (※) と係数を比較すると

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=-11 \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=31 \\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-11 \\ \alpha\beta\gamma\delta=1 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots ⑦$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}&=\frac{\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta}\\ &=\frac{-11}{1} \quad (\because ⑦)\\ &=-11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)\\ &=(-11)^2-2\cdot31 \quad (\because ⑦)\\ &=59\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3&=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3-3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)\\ &\qquad+3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta) \quad\cdots\cdots\cdots ⑧\\ &=(-11)^3-3(-11)\cdot31+3(-11)\\ &=-341\end{aligned}$$

参考　⑧ に関して

$$\begin{cases} a+b+c+d=s_1 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=s_2 \\ abc+abd+acd+bcd=s_3 \end{cases}$$ とすると

$$\begin{aligned}s_1s_2&=a^2b+a^2c+a^2d+ab^2+b^2c+b^2d+ac^2+bc^2+c^2d+ad^2+bd^2+cd^2\\ &\qquad+3(abc+abd+acd+bcd)\\ &=a^2b+a^2c+a^2d+ab^2+b^2c+b^2d+ac^2+bc^2+c^2d+ad^2+bd^2+cd^2+3s_3\\ &\qquad\cdots\cdots\cdots ⑨\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{s_1}^3&=a^3+b^3+c^3+d^3+3(a^2b+a^2c+a^2d+ab^2+b^2c+b^2d+ac^2+bc^2+c^2d\\ &\qquad+ad^2+bd^2+cd^2)+6(abc+abd+acd+bcd)\\ &=a^3+b^3+c^3+d^3+3(a^2b+a^2c+a^2d+ab^2+b^2c+b^2d+ac^2+bc^2+c^2d\\ &\qquad+ad^2+bd^2+cd^2)+6s_3 \quad\cdots\cdots\cdots ⑩\end{aligned}$$

⑩$-3\times$ ⑨ より

$${s_1}^3-3s_1s_2=a^3+b^3+c^3+d^3-3s_3$$

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3+d^3={s_1}^3-3s_1s_2+3s_3$$

よって、⑧ が成り立つ。