1 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

a を正の実数とし、複素数平面上の点 $z_1=\sqrt{2}\,a+\sqrt{2}\,ai$、$z_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{3}{2}ai$ を考える。

また、z_1 および z_2 を原点のまわりに角 θ_1 および θ_2（$-\pi\leqq\theta_1<\pi$、$-\pi\leqq\theta_2<\pi$）回転させた点をそれぞれ w_1 および w_2 とする。ただし、i は虚数単位とする。

(1) $|z_1z_2|$ および $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ を求めよ。

(2) $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ および $\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$ のとき、w_1 および w_2 の値を求めよ。

(3) $|w_1+w_2|$ の最大値と最小値を求め、そのときの θ_1 と θ_2 の関係をそれぞれ示せ。

解説

(1) $z_1=2a\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$

$=2a\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_2=3a\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)$

$=3a\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

よって、$|z_1z_2|=2a\times 3a=6a^2$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{2a}{3a}=\dfrac{2}{3}$

(2) z_1 を原点周りに θ_1 回転させた点が w_1 より

$w_1=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot z_1$

$=2a\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta_1\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta_1\right)\right\}$ ………①

z_2 を原点周りに θ_2 回転させた点が w_2 より

$w_2=(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot z_2$

$=3a\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\theta_2\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+\theta_2\right)\right\}$ ………②

$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

①から、$w_1=2a\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=2a\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=2ai$

$\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

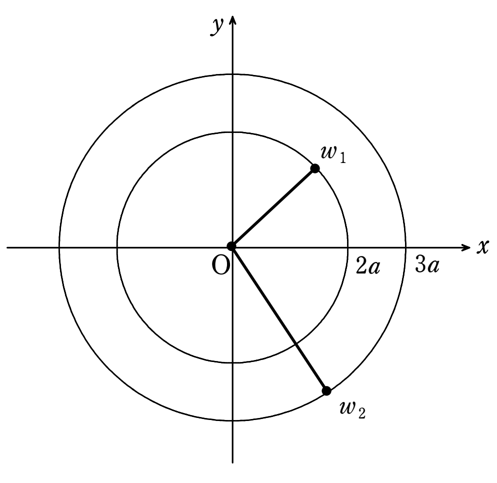
②から、$w_2=3a\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=3a(\cos 0+i\sin 0)$

$=3a$

(3) ①、② と $-\pi\leqq\theta_1<\pi$、$-\pi\leqq\theta_2<\pi$ より

w_1、w_2 はそれぞれ原点を中心とする半径 $2a$、$3a$ の円周上を動く。



よって、w_1、w_2 に関して不等式

$||w_1|-|-w_2||\leqq|w_1-(-w_2)|\leqq|w_1|+|-w_2|$

$\therefore\ |w_2|-|w_1|\leqq|w_1+w_2|\leqq|w_1|+|w_2|$ ………………③

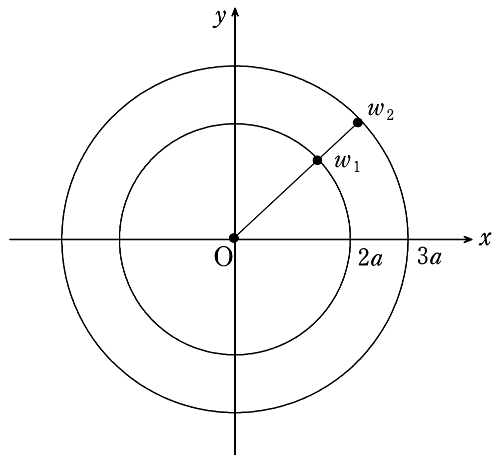
が成り立つ。（三角不等式より）

よって、$|w_1+w_2|$ が最大となるのは、

③より、$|w_1+w_2|\leqq|w_1|+|w_2|$ の等号が成り立つとき

すなわち、O、w_1、w_2 がこの順で一直線上に並ぶときより

最大値は、$2a+3a=5a$



このとき、偏角は

$\dfrac{\pi}{4}+\theta_1=\left(-\dfrac{\pi}{6}+\theta_2\right)+2k\pi$ （k：整数）

$\therefore\ \theta_1-\theta_2=-\dfrac{5}{12}\pi+2k\pi$

$-\pi\leqq\theta_1<\pi$、$-\pi\leqq\theta_2<\pi$ より

$-2\pi<\theta_1-\theta_2<2\pi$

となるので、$k=0$、1

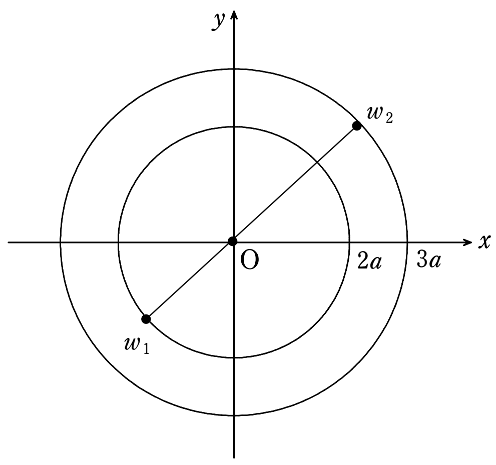
よって、$\theta_1-\theta_2=-\dfrac{5}{12}\pi$ または、$\theta_1-\theta_2=\dfrac{19}{12}\pi$

また、$|w_1+w_2|$ が最小となるのは、

③より、$|w_2|-|w_1|\leqq|w_1+w_2|$ の等号が成り立つとき

すなわち、w_1、O、w_2 がこの順で一直線上に並ぶときより

最小値は、$3a-2a=a$



このとき、偏角は

$\dfrac{\pi}{4}+\theta_1=\left(-\dfrac{\pi}{6}+\theta_2\right)+(2\ell-1)\pi$ （ℓ：整数）

$\therefore\ \theta_1-\theta_2=-\dfrac{5}{12}\pi+(2\ell-1)\pi$

$-2\pi<\theta_1-\theta_2<2\pi$ より

$\ell=0$、1

よって、$\theta_1-\theta_2=-\dfrac{17}{12}\pi$ または、$\theta_1-\theta_2=\dfrac{7}{12}\pi$

2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。
△OABにおいて、OA＝7、OB＝8、AB＝9とする。△OABの垂心をH、内心をI、外心をJとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{OJ}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

解説

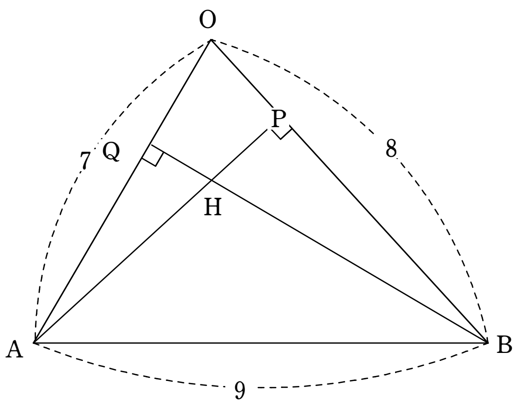
(1) △OABで余弦定理より

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\,OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$$

$\therefore\ 81=49+64-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=16$

(2)



AからOBに下した垂線の足をP、BからOAに下した垂線の足をQとすると

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle AOB$ より

$16=7\cdot8\cdot\cos\angle AOB$

$\therefore\ \cos\angle AOB=\dfrac{2}{7}$

よって、$\begin{cases} OP=OA\cdot\cos\angle AOB=7\cdot\dfrac{2}{7}=2 \\ OQ=OB\cdot\cos\angle AOB=8\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{16}{7} \end{cases}$

メネラウスの定理から

$$\frac{OB}{BP}\cdot\frac{PH}{HA}\cdot\frac{AQ}{QO}=1$$

$\therefore\ \dfrac{8}{6}\cdot\dfrac{PH}{HA}\cdot\dfrac{\frac{33}{7}}{\frac{16}{7}}=1$

$\therefore\ \dfrac{11}{4}\cdot\dfrac{PH}{HA}=1$

$\therefore\ PH:HA=4:11$

よって、$\overrightarrow{OH}=\dfrac{4}{15}\overrightarrow{OA}+\dfrac{11}{15}\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{4}{15}\vec{a}+\dfrac{11}{15}\cdot\dfrac{1}{4}\vec{b}$

$=\dfrac{4}{15}\vec{a}+\dfrac{11}{60}\vec{b}$

別解　設定は最初の解答と同じ

$\overrightarrow{OH}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと（x、yは実数）

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OH}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot\cos\angle AOH$

$=|\overrightarrow{OQ}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\qquad(\because |\overrightarrow{OH}|\cdot\cos\angle AOH=|\overrightarrow{OQ}|)$

$=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB\qquad(\because |\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB=|\overrightarrow{OQ}|)$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

よって、$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ (x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{a}=16$

$\therefore\ 49x+16y=16$ ………①

同様にして、$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

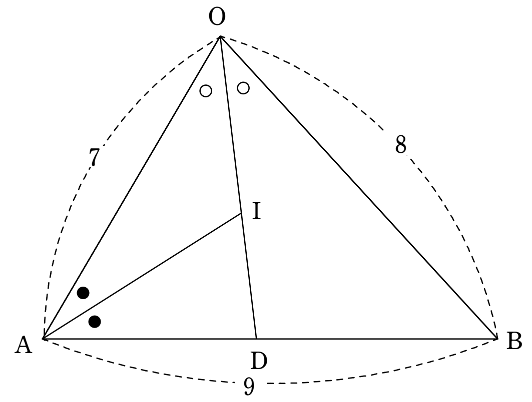
$\therefore\ (x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{b}=16$

$\therefore\ 16x+64y=16$ ………②

①、②より、$x=\dfrac{4}{15}$、$y=\dfrac{11}{60}$

よって、$\overrightarrow{OH}=\dfrac{4}{15}\vec{a}+\dfrac{11}{60}\vec{b}$

(3)



∠AOBの二等分線とABとの交点をDとすると
∠OABの二等分線とODとの交点がIとなる。
∠AOBの二等分線の性質より

$AD:BD=OA:OB$

$=7:8$

よって、$\overrightarrow{OD}=\dfrac{8}{15}\vec{a}+\dfrac{7}{15}\vec{b}$

∠OABの二等分線の性質より

$OI:ID=AO:AD$

$=7:9\times\dfrac{7}{15}$

$=5:3$

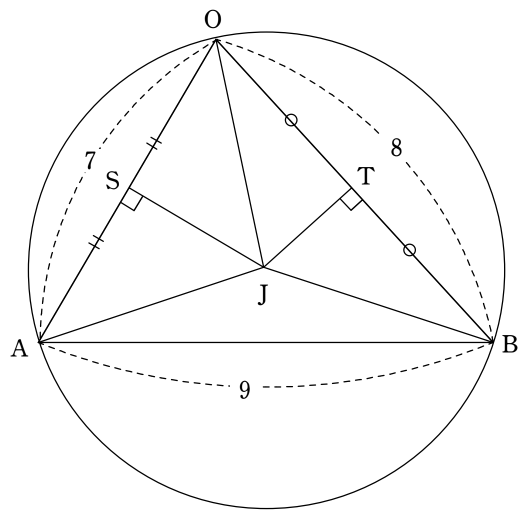
よって、$\overrightarrow{OI}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OD}$

$=\dfrac{5}{8}\left(\dfrac{8}{15}\vec{a}+\dfrac{7}{15}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{7}{24}\vec{b}$

参考　一般的に、$\overrightarrow{OI}=\dfrac{OB\cdot\vec{a}+OA\cdot\vec{b}}{OA+OB+AB}$ である。

(4)



JからOA、OBに下ろした垂線の足をそれぞれS、Tとする。

$\overrightarrow{OJ}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと（p、qは実数）

$\overrightarrow{JS}\perp\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{JT}\perp\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ \overrightarrow{JS}\cdot\overrightarrow{OA}=0$、$\overrightarrow{JT}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\overrightarrow{JS}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より

$(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OJ})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-p\vec{a}-q\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2-p|\vec{a}|^2-q\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\ \dfrac{49}{2}-49p-16q=0$

$\therefore\ 49p+16q=\dfrac{49}{2}$ …………③

$\overrightarrow{JT}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より

$(\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OJ})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}-p\vec{a}-q\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2-p\vec{a}\cdot\vec{b}-q|\vec{b}|^2=0$

$\therefore\ 32-16p-64q=0$

$\therefore\ p+4q=2$ …………④

③、④ より、$p=\dfrac{11}{30}$、$q=\dfrac{49}{120}$

よって、$\overrightarrow{OJ}=\dfrac{11}{30}\vec{a}+\dfrac{49}{120}\vec{b}$

別解　設定は最初の解答と同じ

$\overrightarrow{OJ}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと（p、qは実数）

$\overrightarrow{OJ}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OJ}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOJ$

$=|\overrightarrow{OS}|\cdot|\overrightarrow{OA}|$

$=\dfrac{49}{2}$

よって、$(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot\vec{a}=\dfrac{49}{2}$

$\therefore\ \ p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{49}{2}$

$\therefore\ \ 49p+16q=\dfrac{49}{2}$　…………③

$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OJ}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{BOJ}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$=32$

よって、$(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot\vec{b}=32$

$\therefore\ \ p\vec{a}\cdot\vec{b}+q|\vec{b}|^2=32$

$\therefore\ \ 16p+64q=32$

$\therefore\ \ p+4q=2$　…………④

③、④ より、$p=\dfrac{11}{30}$、$q=\dfrac{49}{120}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\dfrac{11}{30}\vec{a}+\dfrac{49}{120}\vec{b}$

3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$m>1$ とする。xy 平面において

放物線 $y=mx-x^2$ ………① と直線 $y=-x+m$ ………②

とがある。

(1−1)　①と②の交点の座標をすべて求めよ。

(1−2)　①と②とで囲まれる図形の面積と、①と②および y 軸とで囲まれる図形の面積が等しいとき、その面積を S とする。そのときの m の値と S の値を求めよ。

(2)　3個のサイコロを同時に投げた。

サイコロは、1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(2−1)　出た目に2または3が含まれる確率はいくらか。

(2−2)　出た目の和が偶数である確率はいくらか。

(2−3)　出た目の和が12である確率はいくらか。

解説

(1)

(1−1)　①と②より

$$mx-x^2=-x+m$$

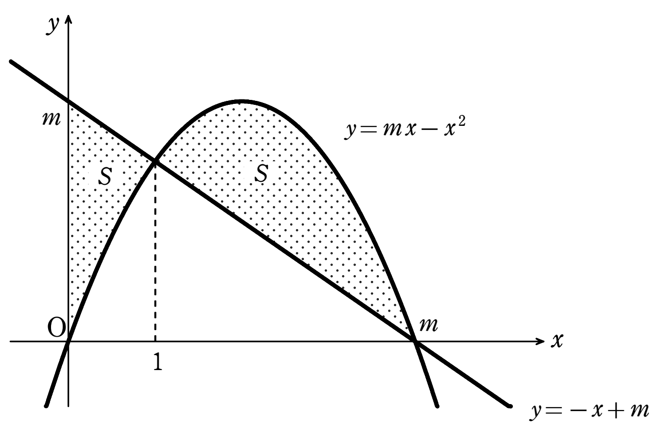
$$\therefore\ x^2-(m+1)x+m=0$$

$$\therefore\ (x-1)(x-m)=0$$

$$\therefore\ x=1、m$$

よって、交点は (1、$m-1$)、(m、0)

(1−2)　①、②、S（打点部分）を図示すると、以下のようになる。



条件より

$$\int_1^m\{(mx-x^2)-(-x+m)\}dx=\int_0^1\{(-x+m)-(mx-x^2)\}dx$$

$$\therefore\ -\int_1^m\{x^2-(m+1)x+m\}dx=\int_0^1\{x^2-(m+1)x+m\}dx$$

$$\therefore\ \int_0^1\{x^2-(m+1)x+m\}dx+\int_1^m\{x^2-(m+1)x+m\}dx=0$$

$$\therefore\ \int_0^m\{x^2-(m+1)x+m\}dx=0$$

$$\therefore\ \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+mx\right]_0^m=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}(m+1)m^2+m^2=0$$

$m>1$ より

$$\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}(m+1)+1=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{6}m=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ m=3$$

よって、$S=\int_1^3\{(3x-x^2)-(-x+3)\}dx$

$$=\int_1^3-(x-1)(x-3)dx$$

$$=\frac{1}{6}(3-1)^3$$

$$=\frac{4}{3}$$

(2)

(2−1)　(2または3が出る確率)＝1−(2または3以外の目が出る確率)

$$=1-\left(\frac{4}{6}\right)^3$$

$$=\frac{19}{27}$$

(2−2)　出た目の和が偶数となるのは

(ⅰ)　すべて偶数

(ⅱ)　偶数が1回、奇数が2回

出るときより ………………(※)

(ⅰ)のとき

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$$

(ⅱ)のとき

$${}_3C_1\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{3}{8}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

別解　(※)の続き

・すべて偶数が出る確率とすべて奇数が出る確率

・偶数が1回、奇数が2回と奇数が1回、偶数が2回が出る確率

はそれぞれ等しいので、求める確率は $\frac{1}{2}$

(2−3)　出た目の和が12となる組み合わせは

(ⅰ)　すべて異なる目が出るとき：(1、5、6)、(2、4、6)、(3、4、5)

(ⅱ)　2つ同じ目が出るとき：(2、5、5)、(3、3、6)

(ⅲ)　すべて同じ目が出るとき：(4、4、4)

である。

(ⅰ)のとき

$$3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot 3!=\frac{18}{216}$$

(ⅱ)のとき

$$2\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot 3=\frac{6}{216}$$

(ⅲ)のとき

$$1\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

よって、求める確率は

$$\frac{18+6+1}{216}=\frac{25}{216}$$

4 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log(x+2)\,dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle F(x)=\int_x^{x+1}\frac{1-t}{t^2+1}dt$ を最大にする x の値を求めよ。

(3) $y=2\cos 3x+\cos 2x+2\cos x$ の最大値、最小値を求めよ。

(解説)

(1)
$$\int_0^1 \log(x+2)dx=\int_0^1 (x+2)'\log(x+2)dx$$
$$=\Big[(x+2)\log(x+2)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$
$$=3\log 3-2\log 2-\Big[x\Big]_0^1$$
$$=3\log 3-2\log 2-1$$

(2) $F(x)$ を x で微分して
$$F'(x)=(x+1)'\cdot\frac{1-(x+1)}{(x+1)^2+1}-x'\cdot\frac{1-x}{x^2+1}$$
$$=\frac{-x}{x^2+2x+2}-\frac{1-x}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2-x-2}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$$
$$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$$

よって、増減表は以下のようになる。

x		-1		2	
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ここで、$-1\leqq t\leqq 0$ で、$\dfrac{1-t}{t^2+1}>0$ より
$$F(-1)=\int_{-1}^0\frac{1-t}{t^2+1}dt>0\lim_{\to}$$

また、十分大きい x について、$x\leqq t\leqq x+1$ で、$\dfrac{1-t}{t^2+1}<0$ より
$$F(x)=\int_x^{x+1}\frac{1-t}{t^2+1}dt<0$$

よって、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)<0$ となる。

以上より、$x=-1$ で最大となる。

別解　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)$ について

$f(t)=\dfrac{1-t}{t^2+1}$ とおくと
$$f'(t)=\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}$$

よって、増減表は以下のようになる。

t		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x\geqq 1+\sqrt{2}$ において、$x\leqq t\leqq x+1$ で $f(t)$ は単調増加より
$$f(x)\leqq f(t)\leqq f(x+1)$$
$$\therefore\ \frac{1-x}{x^2+1}\leqq f(t)\leqq\frac{1-(x+1)}{(x+1)^2+1}$$
$$\therefore\ \int_x^{x+1}\frac{1-x}{x^2+1}dt\leqq F(x)\leqq\int_x^{x+1}\frac{-x}{(x+1)^2+1}dt$$
$$\therefore\ \frac{1-x}{x^2+1}\leqq F(t)\leqq\frac{-x}{(x+1)^2+1}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x^2+1}=0$、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{(x+1)^2+1}=0$ より

はさみうちの原理から、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=0$

よって、$x=-1$ で最大となることが分かる。

(3)
$$y=2\cos 3x+\cos 2x+2\cos x$$
$$=2(4\cos^3x-3\cos x)+(2\cos^2x-1)+2\cos x$$
$$=8\cos^3x+2\cos^2x-4\cos x-1$$

$\cos x=t$ とおくと、$0\leqq x<2\pi$ より、$-1\leqq t\leqq 1$

よって、$y=8t^3+2t^2-4t-1$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ より
$$y'=24t^3+4t-4$$
$$=4(2t+1)(3t-1)\quad より$$

増減表は以下のようになる。

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{49}{27}$	↗	5

よって、最大値 5 、最小値 -3