1 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

座標平面上において原点を O とする。O を中心とする半径 $2\sqrt{7}$ の円 C_1 を考える。C_1 と x 軸との交点を $\mathrm{A}(-2\sqrt{7},\ 0)$、$\mathrm{B}(2\sqrt{7},\ 0)$ とする。C_1 上の点 E、F でできる線分 EF で C_1 を、円弧の部分が OB の中点 C で x 軸に接するように折り返す。ただし、E、F の y 座標は負でないものとする。

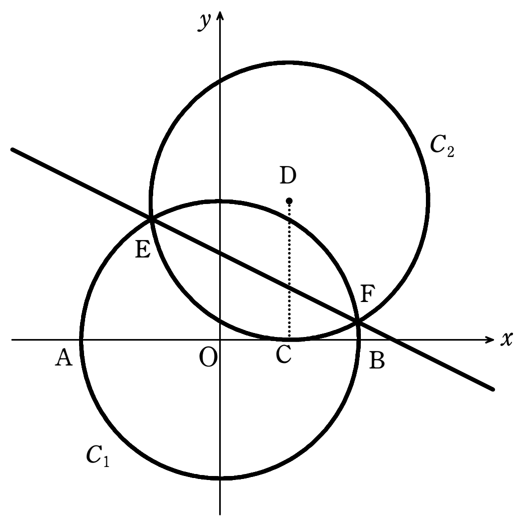
(1) 折り返して得られる円弧を一部とする円 C_2 の中心を D とするとき、D の座標を求めよ。また、C_2 を表す式を求めよ。

(2) EF を直径とする円 C_3 を考えるとき、円の中心 G の座標を求めよ。また、C_3 を表す式を求めよ。

(3) C_3 と y 軸の 2 つの交点を考えるとき、この 2 点間の距離を求めよ。

(4) C_1 の円周のうち、$-2\sqrt{7} \leqq x \leqq 2\sqrt{7}$、$0 \leqq y \leqq 2\sqrt{7}$ の部分を考える。円周上の弧 PQ で折り返したとき、折り返された弧が x 軸に接するようにする。このような弦 PQ の存在する範囲を求めよ。

(解説)



(1) 円 C_2 はEF に関して円 C_1 を折り返したものより、円 C_2 の半径は $2\sqrt{7}$

また、円 C_2 は $\mathrm{C}(\sqrt{7},\ 0)$ で x 軸と接するので、中心 D の座標は、$(\sqrt{7},\ 2\sqrt{7})$ となる。よって、円 C_2 の方程式は

$$(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2=28$$

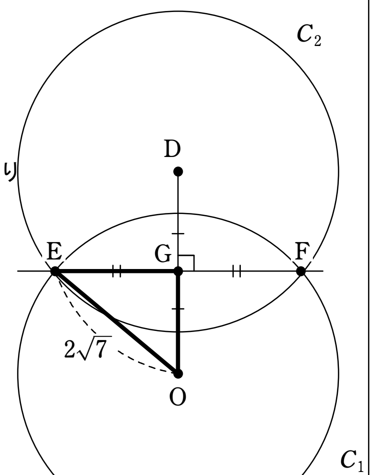
(2) 円 C_1、円 C_2 は合同で直線 EF に関して対称より線分 OD の中点が G となる。

よって、G の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\ \sqrt{7}\right)$ となる。

円 C_3 の半径は EG より、△OEG で三平方の定理より

$$\mathrm{GE}^2=\mathrm{OE}^2-\mathrm{OG}^2$$
$$=(2\sqrt{7})^2-\left\{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(\sqrt{7})^2\right\}$$
$$=\frac{77}{4}$$

$\therefore\ \mathrm{GE}=\dfrac{\sqrt{77}}{2}$



よって、円 C_3 の方程式は

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

別解　E、F を通るグラフは

$x^2+y^2-28+k\{(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2-28\}=0$ (k は実数) …… ①　と表される。

$k=-1$ のとき、直線 EF となるので

$$x^2+y^2-28-\{(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2-28\}=0$$

$\therefore\ 2x+4y-5\sqrt{7}=0$

$\therefore\ x=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}-2y$ …… ③

$x^2+y^2=28$ に代入して

$$\left(\frac{5\sqrt{7}}{2}-2y\right)^2+y^2=28$$

$\therefore\ 5y^2-10\sqrt{7}\,y+\dfrac{63}{4}=0$

E、F の y 座標をそれぞれ y_1、y_2 とすると $(y_1<y_2)$

解と係数の関係から、$y_1+y_2=2\sqrt{7}$、$y_1y_2=-\dfrac{63}{20}$

よって、C_3 の中心の y 座標は、$\dfrac{y_1+y_2}{2}=\sqrt{7}$　となるので、

直線 EF に代入して

$$2x+4\cdot\sqrt{7}-5\sqrt{7}=0$$

$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

よって、G の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\ \sqrt{7}\right)$ となる。

また、$\mathrm{EF}=\sqrt{(y_2-y_1)^2+\left\{\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{2}-2y_2\right)-\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{2}-2y_1\right)\right\}^2}$

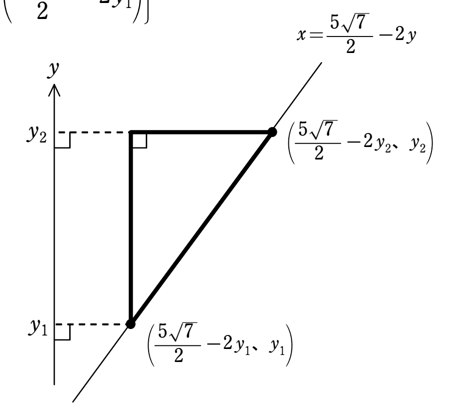
$=\sqrt{(y_2-y_1)^2+\{2(y_2-y_1)\}^2}$

$=\sqrt{1+2^2}\cdot(y_2-y_1)$

$=\sqrt{5}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{28-4\cdot\dfrac{63}{20}}$

$=\sqrt{77}$



よって、半径は $\dfrac{\sqrt{77}}{2}$ となるので、

円 C_3 の方程式は

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

別解　E、F を通るグラフは

$x^2+y^2-28+k\{(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2-28\}=0$ (k は実数)　と表される。

$k=-1$ のとき、直線 EF となるので、直線 EF の式は

$$x^2+y^2-28-\{(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2-28\}=0$$

$\therefore\ 2x+4y-5\sqrt{7}=0$

これより、E、F を通るグラフは

$x^2+y^2-28+k\{2x+4y-5\sqrt{7}\}=0$ (k は実数)

$\therefore\ (x+k)^2+(y+2k)^2=-5k^2+5\sqrt{7}\,k+28$ ……… ④　とも表される。

線分 EF が直径となるとき、中心 $(-k,\ -2k)$ は直線 EF 上にあるので

$$2(-k)+4(-2k)-5\sqrt{7}=0$$

$\therefore\ k=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

よって、④ より、円 C_3 の方程式は

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

(3) 円 C_3 と y 軸の交点より、C_3 の方程式に $x=0$ を代入して

$$\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

$\therefore\ (y-\sqrt{7})^2=\dfrac{70}{4}$

$\therefore\ y-\sqrt{7}=\pm\dfrac{\sqrt{70}}{2}$

$\therefore\ y=\sqrt{7}\pm\dfrac{\sqrt{70}}{2}$

よって、2 点間の距離は

$$\left(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{70}}{2}\right)-\left(\sqrt{7}-\frac{\sqrt{70}}{2}\right)=\sqrt{70}$$

(4) 折り返してできる円弧と x 軸との接点を $(t,\ 0)$ とすると $(-2\sqrt{7}\leqq t\leqq 2\sqrt{7})$

その円弧を含む円の中心は $(t,\ 2\sqrt{7})$ で半径は $2\sqrt{7}$ より

円の方程式は

$$(x-t)^2+(y-2\sqrt{7})^2=28$$

となる。よって、P、Q を通るグラフは

$x^2+y^2-28+k\{(x-t)^2+(y-2\sqrt{7})^2-28\}=0$ (k は実数)　と表される。

$k=-1$ のとき、直線 PQ となるので

$$x^2+y^2-28-\{(t-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2-28\}=0$$

$\therefore\ 2tx+4\sqrt{7}\,y-t^2-28=0$

$\therefore\ t^2-2xt-4\sqrt{7}\,y+28=0$ ……… ⑤

よって、直線 PQ の存在領域は、t に関する方程式 ⑤ が $-2\sqrt{7}\leqq t\leqq 2\sqrt{7}$ において少なくとも 1 つ実数解をもつような x、y の領域より

⑤ の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f(t)=(t-x)^2-x^2-4\sqrt{7}\,y+28 \text{ より}$$

(ⅰ) $f(-2\sqrt{7})\geqq 0$ かつ、$f(2\sqrt{7})\geqq 0$ のとき

つまり、$x-y+4\sqrt{7}\geqq 0$ かつ、$-x-y+4\sqrt{7}\geqq 0$

$\therefore\ y\leqq x+4\sqrt{7}$ かつ、$y\leqq -x+4\sqrt{7}$ のとき

求める条件は

$$\begin{cases} D\geqq 0 \\ -2\sqrt{7}\leqq x\leqq 2\sqrt{7} \end{cases} \qquad \therefore\ \begin{cases} y\geqq -\dfrac{x^2}{4\sqrt{7}}+\sqrt{7} \\ -2\sqrt{7}\leqq x\leqq 2\sqrt{7} \end{cases}$$

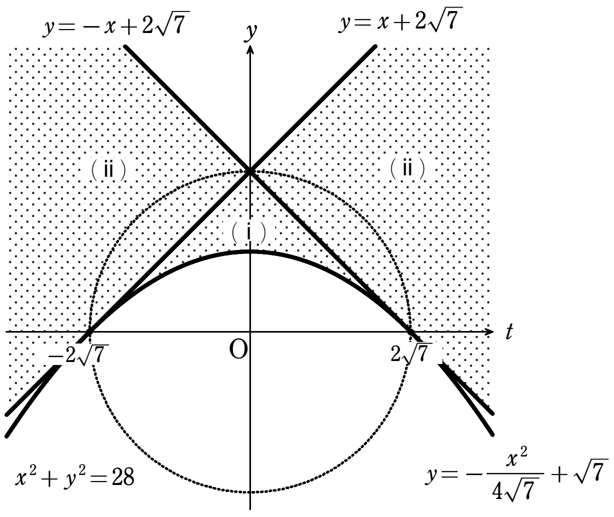
(ⅱ) $f(-2\sqrt{7})\cdot f(2\sqrt{7})\leqq 0$ のとき

つまり、$(x-y+4\sqrt{7})(-x-y+4\sqrt{7})\leqq 0$

$\therefore\ (y-x-4\sqrt{7})(y-x-4\sqrt{7})\leqq 0$ のとき

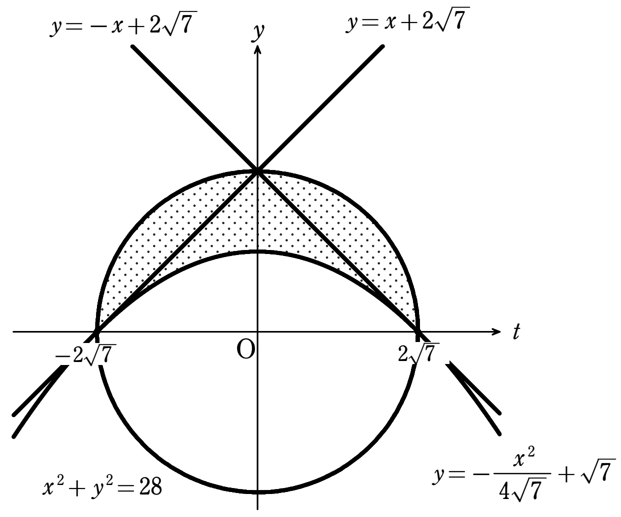
このとき、$-2\sqrt{7}\leqq t\leqq 2\sqrt{7}$ で少なくとも 1 つ実数解を必ずもつ。

(ⅰ)、(ⅱ) より、直線 PQ の通過領域は、以下のようになる。（ただし、境界線は含む）



線分 PQ は、$x^2+y^2\leqq 28\,(y\geqq 0)$ の部分に含まれるので

線分 PQ の通過領域は、以下のようになる。（ただし、境界線は含む）



2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　6 桁の自然数 2021□2 が 8 の倍数であるとき、□ に入る数字をすべて求めよ。

(2)　$\left(\sqrt{n^2-9n+19}\right)^{n^2+5n-14}=1$ を満たす自然数 n をすべて求めよ。

(3)　m、n を自然数とするとき、m、$m+2$、$m+4$、$m+8$、……、$m+2^n$ （このような組を (※) とする。）の和がちょうど 1000 になるとする。このよう (※) をすべて求めよ。

解説

(1)　下 3 桁が 8 の倍数であればよいので

以下、$mod\,8$ として

$2021\square 2\equiv 0$

$\therefore\ 1\times 100+\square\times 10+2\equiv 0$

$\therefore\ 4+\square\times 2+2\equiv 0$

$\therefore\ \square\times 2+6\equiv 0$

これを満たす□は、□＝1、5、9

(2)　与式が成立するのは

(i)　$n^2+5n-14=0$

(ii)　$n^2-9n+19=1$

(iii)　$n^2-9n+19=-1$ かつ、$n^2+5n-14$ が 4 の倍数

のときである。

(i) のとき

$n^2+5n-14=0$

$\therefore\ (n+7)(n-2)=0$

n は自然数より、$n=2$

(ii) のとき

$n^2-9n+19=1$

$\therefore\ n^2-9n+18=0$

$\therefore\ (n-3)(n-6)=0$

$\therefore\ n=3$、6

(iii) のとき

$n^2-9n+19=-1$

$\therefore\ n^2-9n+20=0$

$\therefore\ (n-4)(n-5)=0$

$\therefore\ n=4$、5

$n=4$ のとき

$n^2+5n-14=4^2+5\cdot 4-14=22$ より不適

$n=5$ のとき

$n^2+5n-14=5^2+5\cdot 5-14=36$ より適する。

(i)～(iii) より

$n=2$、3、5、6

(3)　条件より

$m+(m+2)+(m+4)+\cdots\cdots+(m+2^n)=1000$

$\therefore\ m(n+1)+\sum_{k=1}^{n}2\cdot 2^{k-1}=1000$

$\therefore\ m(n+1)+\frac{2(2^n-1)}{2-1}=1000$

$\therefore\ m(n+1)+2(2^n-1)=1000$

$\therefore\ m(n+1)=2(501-2^{n+1})$ ……①

ここで、$m\geqq 1$、$n\geqq 1$ より、$m(n+1)\geqq 2$ より

$1000-2(2^n-1)\geqq 2$

$\therefore\ 2^{n+1}\leqq 1000$

よって、$1\leqq n\leqq 8$　　($\because\ 2^9=512$、$2^{10}=1024$)

この範囲で ① を満たすものは

$(m$、$n)=(499$、$1)$、$(194$、$4)$

よって、求める組は

499、501　と　194、196、198、202、210

3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　白球 7 個、赤球 3 個の計 10 個の球の入った袋がある。いまこの袋から 1 個ずつ順に 3 回球を取り出す。白球を取り出したときは球を戻さないが、赤球を取り出したときは球を袋に戻すとする。

(1−1)　取り出した球が少なくとも 1 個は赤球であった確率を求めよ。

(1−2)　3 回目に取り出したのが白球であり、袋に残った球が 8 個であった確率を求めよ。

(2)　xy 平面において

$$y^2 \leqq x-1 \text{ かつ } (x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1$$

を満たす点 $(x、y)$ の集合からなる図形を A とする。

(2−1)　図形 A の面積 S を求めよ。

(2−2)　図形 A を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解説

(1)

(1−1　3 回とも白球である確率は

$$\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$$

よって、取り出した球が少なくとも 1 個は赤球であった確率は

$$1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

(1−2)　3 回目に取り出したのが白球かつ袋に残った球が 8 個となるのは以下の表のときである。

	1 回目	2 回目	3 回目
(i)	W	R	W
(ii)	R	W	W

R : 赤球を取り出す
W : 白球を取り出す

(i)のとき

$$\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{9}=\frac{14}{90}$$

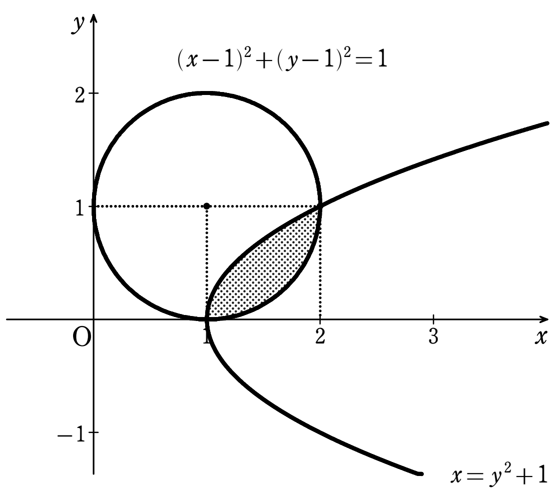
(ii)のとき

$$\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{7}{50}$$

よって、求める確率は

$$\frac{14}{90}+\frac{7}{50}=\frac{70+63}{450}=\frac{133}{450}$$

(2)　図形 A を図示すると、以下の打点部分となる。（境界線は含む）



(2−1)

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ より

$$(x-1)^2=1-(y-1)^2$$

$$\therefore\quad x-1=\pm\sqrt{1-(y-1)^2}$$

$$\therefore\quad x=1\pm\sqrt{1-(y-1)^2}$$

よって、求める面積 S は

$$S=\int_0^1\left\{\left(1+\sqrt{1-(y-1)^2}\right)-(y^2+1)\right\}dy$$

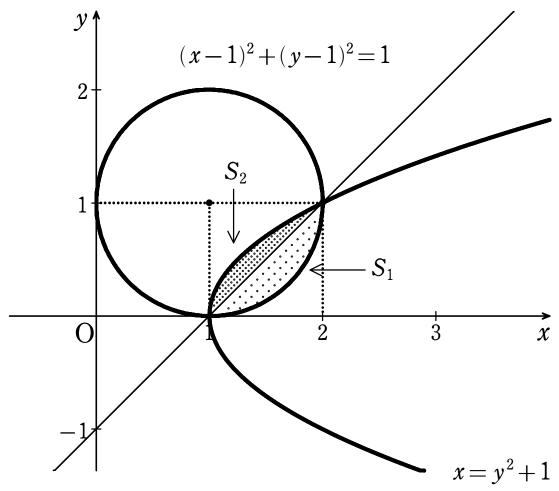
$$=\int_0^1\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy-\int_0^1 y^2dy$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

$x=y+1$

別解



$(1、0)$、$(2、1)$ を通る直線は $x=y+1$ で

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と $x=y+1$ で囲まれた部分の面積を S_1

$x=y^2+1$ と $x=y+1$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

求める面積 S は

$$S=S_1+S_2$$

$$=\left(\pi\cdot1^2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot1^2\right)+\int_0^1\{(y+1)-(y^2+1)\}dy$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\int_0^1 y(y-1)dy$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot(1-0)^3$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

(2−2)　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ より

$$(y-1)^2=1-(x-1)^2$$

$$\therefore\quad y-1=\pm\sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\therefore\quad y=1\pm\sqrt{1-(x-1)^2}$$

よって、図形 A を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は

$$V=\pi\int_1^2(x-1)dx-\pi\int_1^2\left\{1-\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2-\pi\int_1^2\left\{2+(x-1)^2-2\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\pi\left[2x+\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2+2\pi\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{5}{3}\pi+2\pi\times\left(\pi\cdot1^2\times\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{7}{6}\pi$$

参考　最初に x 軸方向に -1 平行移動してから求めてもよい。

4 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)

(1−1)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の面積 S を求めよ。

(1−2)　曲線 $px^2+qy^2=z+2$ (p、q は正の定数) と xy 平面で囲まれる立体の体積 V を求めよ。

(2)　A が金貨 4 枚、B が銀貨 3 枚投げる。
硬貨の表が出た枚数の多い方を勝ち、同じ枚数のときは引き分けとする。
ただし、硬貨の表裏の出る確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ であるものとする。

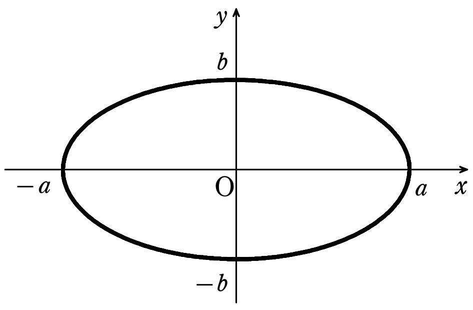
(2−1)　A の勝つ確率、B の勝つ確率、引き分けの確率を求めよ。

(2−2)　勝ったほうが相手の投げた硬貨を全部もらえるものとする。金貨の額面は銀貨の額面の整数倍とする。B が勝ち取る金額の期待値 (平均値) を A のそれよりも高くしたい。金貨の額面は銀貨の額面の少なくとも何倍とすべきか。

解説

(1)

(1−1)　公式より、$S=\pi ab$



別解　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$\therefore\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$\therefore\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}$$

よって、対称性を考慮して

$$\begin{aligned}S&=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\\&=4\cdot\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\\&=4\cdot\frac{b}{a}\times\left(\pi a^2\times\frac{1}{4}\right)\\&=\pi ab\end{aligned}$$

(1−2)　$px^2+qy^2=z+2$ において、(左辺)$\geqq0$ より

$$z+2\geqq0$$

$$\therefore\quad z\geqq-2$$

よって、平面 $z=k\ (-2\leqq k\leqq0)$ での断面は

$$px^2+qy^2=k+2$$

$k\fallingdotseq-2$ のとき

$$\frac{x^2}{\dfrac{k+2}{p}}+\frac{y^2}{\dfrac{k+2}{q}}=1$$

となるので、断面積を $S(k)$ とすると、(1−1) より、

$$\begin{aligned}S(k)&=\pi\sqrt{\frac{k+2}{p}}\cdot\sqrt{\frac{k+2}{q}}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{pq}}(k+2)\quad(k=-2\text{ のときも含む})\end{aligned}$$

よって、求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\int_{-2}^{0}S(k)dk\\&=\int_{-2}^{0}\frac{\pi}{\sqrt{pq}}(k+2)dk\\&=\frac{\pi}{\sqrt{pq}}\left[\frac{1}{2}k^2+2k\right]_{-2}^{0}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{pq}}\end{aligned}$$

(2)　・A が表が出す確率

枚数	4	3	2	1	0
確率	$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$	${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$	${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}$	${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

・B が表が出す確率

枚数	3	2	1	0
確率	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$	${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

・A、B の勝敗と確率

A	4	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2
B	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1
勝敗	A	A	A	A	引き分け	A	A	A	B	引き分け	A
確率	$\frac{1}{128}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{4}{128}$	$\frac{12}{128}$	$\frac{12}{128}$	$\frac{4}{128}$	$\frac{6}{128}$	$\frac{18}{128}$	$\frac{18}{128}$

2	1	1	1	1	0	0	0	0
0	3	2	1	0	3	2	1	0
A	B	B	引き分け	A	B	B	B	引き分け
$\frac{6}{128}$	$\frac{4}{128}$	$\frac{12}{128}$	$\frac{12}{128}$	$\frac{4}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{1}{128}$

(2−1)　B が勝つ確率は

$$\frac{6+4+12+1+3+3}{128}=\frac{29}{128}$$

引き分けとなる確率は

$$\frac{4+18+12+1}{128}=\frac{35}{128}$$

A が勝つ確率は

$$1-\left(\frac{29}{128}+\frac{35}{128}\right)=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$$

(2−2)　銀貨の額面を x、金貨の額面を kx とすると (k、x は自然数)

A が勝ち取る金額の期待値は

$$\frac{1}{2}\times3x=\frac{3}{2}x$$

B が勝ち取る金額の期待値は

$$\frac{29}{128}\times4kx=\frac{29}{32}kx$$

よって、B が勝ち取る金額の期待値が A より高くなるので

$$\frac{29}{32}kx>\frac{3}{2}x$$

$$\therefore\quad k>\frac{48}{29}$$

k は自然数より、$k=2$

よって、少なくとも 2 倍とすればよい。