1 次の文章を読み、下の問い（問１～４）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$f(x)$ が実数を係数とする x の多項式のとき、複素数 α を方程式 $f(x)=0$ の解とすると、共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解である。

p、q を実数として、$g(x)=x^4+px^2+q$ とする。方程式 $g(x)=0$ は $x=\dfrac{1}{2}+i$ も解にもつとする。

問１　$g(x)$ は、実数を係数とする x の多項式

$$h_1(x)=x^2-\boxed{1}\,x+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

で割り切れる。

問２　複素数平面において、$g(x)=0$ の解を頂点とする四角形の面積は $\boxed{4}$ である。

問３　$g(x)$ を問１の $h_1(x)$ で割った商 $h_2(x)$ とする。このとき、

$$\frac{4x^2-5}{g(x)}=\frac{\boxed{5}\,x-\boxed{6}}{h_1(x)}-\frac{\boxed{7}\,x+\boxed{8}}{h_2(x)}$$

が成り立つ。

問４　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{4x^2-5}{g(x)}dx=\boxed{9}\,\boxed{10}\log\boxed{11}$ である。

（解説）

問１　実数係数の方程式 $g(x)=0$ が $x=\dfrac{1}{2}+i$ を解にもつので、$x=\dfrac{1}{2}-i$ も解にもつ。

よって、この２つの解をもつ２次方程式は

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}+i\right)+\left(\dfrac{1}{2}-i\right)=1\\[2mm]\left(\dfrac{1}{2}+i\right)\left(\dfrac{1}{2}-i\right)=\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

より、$x^2-x+\dfrac{5}{4}=0$ となるので

$g(x)$ は $h_1(x)=x^2-x+\dfrac{5}{4}$ で割り切れる。

問２　$g(x)$ は $h_1(x)$ で割り切れるので

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+\left(p-\frac{1}{4}\right)\\ \hline
x^2-x+\frac{5}{4} & x^4\qquad +px^2\qquad\qquad +q\\
 & x^4-x^3+\frac{5}{4}x^2\\ \hline
 & \quad x^3+\left(p-\frac{5}{4}\right)x^2\\
 & \quad x^3\qquad -x^2+\frac{5}{4}x\\ \hline
 & \qquad\left(p-\frac{1}{4}\right)x^2-\frac{5}{4}x\qquad +q\\
 & \qquad\left(p-\frac{1}{4}\right)x^2-\left(p-\frac{1}{4}\right)x+\frac{5}{4}\left(p-\frac{1}{4}\right)\\ \hline
 & \qquad\qquad\left(p-\frac{3}{2}\right)x-\frac{5}{4}p+q+\frac{5}{16}
\end{array}$$

よって、$\begin{cases}p-\dfrac{3}{2}=0\\[2mm]-\dfrac{5}{4}p+q+\dfrac{5}{16}=0\end{cases}$ より、$p=\dfrac{3}{2}$、$q=\dfrac{25}{16}$

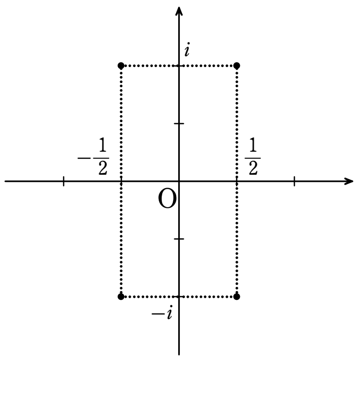
これより

$$g(x)=\left(x^2-x+\frac{5}{4}\right)\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)$$

となる。

よって、$g(x)=0$ より、$x=\pm\dfrac{1}{2}\pm i$（複号任意）

この４点は複素数平面上では以下のようになるので



$g(x)=0$ の解によって作られる四角形の面積は

$1\times2=2$

問３　$h_1(x)=x^2+x+\dfrac{5}{4}$ より

$\dfrac{4x^2-5}{g(x)}=\dfrac{ax-b}{h_1(x)}-\dfrac{cx+d}{h_2(x)}$ とおくと　（a、b、c、d は実数）

$$4x^2-5=\left\{\frac{ax-b}{h_1(x)}-\frac{cx+d}{h_2(x)}\right\}\cdot g(x)$$

$$\therefore\quad 4x^2-5=(ax-b)\cdot h_2(x)-(cx+d)\cdot h_1(x)\qquad(\because\ g(x)=h_1(x)\cdot h_2(x)\ )$$

$$=(ax-b)\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)-(cx+d)\left(x^2-x+\frac{5}{4}\right)$$

$$=(a-c)x^3+(a-b+c-d)x^2+\left(\frac{5}{4}a-b-\frac{5}{4}c+d\right)x-\frac{5}{4}b-\frac{5}{4}d$$

すべての x で成立するので

$$\begin{cases}a-c=0\\ a-b+c-d=0\\ \dfrac{5}{4}a-b-\dfrac{5}{4}c+d=0\\ -\dfrac{5}{4}b-\dfrac{5}{4}d=0\end{cases}$$

より、$a=4$、$b=2$、$c=4$、$d=2$

よって、$\dfrac{4x^2-5}{g(x)}=\dfrac{4x-2}{h_1(x)}-\dfrac{4x+2}{h_2(x)}$

問４　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{4x^2-5}{g(x)}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{4x-2}{h_1(x)}-\frac{4x+2}{h_2(x)}\right\}dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2\left(x^2-x+\frac{5}{4}\right)'}{x^2-x+\frac{5}{4}}-\frac{2\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)'}{x^2+x+\frac{5}{4}}\right\}dx$$

$$=2\left[\log\left|x^2-x+\frac{5}{4}\right|-\log\left|x^2+x+\frac{5}{4}\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\log\left|\frac{x^2-x+\frac{5}{4}}{x^2+x+\frac{5}{4}}\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=-4\log2$$

2 次の文章を読み、下の問い（問１〜３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

斜辺 BC の長さが 1 である直角三角形ABC がある。BC を $(2n+1)$ 等分する点を B に近い方から順に M_1、M_2、……、M_{2n} とする。

問１　5 等分したときは

$$\sum_{k=1}^{4} AM_k{}^2=\frac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$$

である。

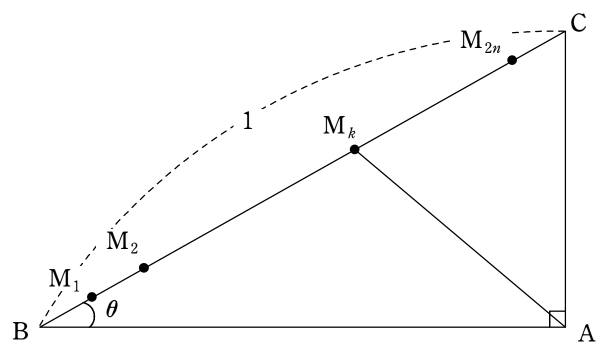
問２　任意の自然数 n に対し、

$$\sum_{k=1}^{2n} AM_k{}^2=\frac{\boxed{14}}{\boxed{15}}\cdot\frac{n\left(\boxed{16}\,n+1\right)}{\boxed{17}\,n+1}$$

である。

問３　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} AM_k{}^2=\frac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ である。

（解説）



$\angle ABC=\theta$ とおくと $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\triangle ABM_k$ で余弦定理より

$$AM_k{}^2=AB^2+BM_k{}^2-2AB\cdot BM_k{}^2\cdot\cos\theta$$

$$=\cos^2\theta+\left(\frac{k}{2n+1}\right)^2-2\cos\theta\cdot\frac{k}{2n+1}\cdot\cos\theta$$

$$=\cos^2\theta+\frac{k^2}{(2n+1)^2}-\frac{2k}{2n+1}\cos^2\theta$$

よって

$$\sum_{k=1}^{2n} AM_k{}^2=\sum_{k=1}^{2n}\left\{\cos^2\theta+\frac{k^2}{(2n+1)^2}-\frac{2k}{2n+1}\cos^2\theta\right\}$$

$$=2n\cos^2\theta+\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)-\frac{2\cos^2\theta}{2n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)$$

$$=2n\cos^2\theta+\frac{n(4n+1)}{3(2n+1)}-2n\cos^2\theta$$

$$=\frac{n(4n+1)}{3(2n+1)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

問１　①で、$n=2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{4} AM_k{}^2=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 5}=\frac{6}{5}$$

問２　①より

$$\sum_{k=1}^{2n} AM_k{}^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(4n+1)}{2n+1}$$

問３　①より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} AM_k{}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{3\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}$$

3 次の文章を読み、下の問い（問１～４）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。
必要があれば、$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$ を用いること。

　A と B がさいころを交互に投げるゲームを行う。最初に A が投げるものとする。
　相手が直前に出した目と同じ目を出した方が負けとし、このゲームは終わる。

問１　B がさいころを２回投げたところで負ける確率は

$$\frac{\boxed{20}\,\boxed{21}}{\boxed{22}\,\boxed{23}\,\boxed{24}}$$

　である。

問２　B がさいころを k 回投げたところで負ける確率は

$$\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}}\left(\frac{\boxed{27}}{\boxed{28}}\right)^{\boxed{29}k-\boxed{30}}$$

　である。

問３　B がこのゲームに負ける確率は

$$\frac{\boxed{31}}{\boxed{32}\,\boxed{33}}$$

　である。

問４　A と B が n 回ずつ投げても勝ち負けが決まらないときはゲームをやめることにする。B の負ける確率が $\frac{1}{2}$ を超えるのは $n\geqq\boxed{34}$ のときである。

解説

問１　B がさいころを２回投げたところで負けるのは、以下の表より

回数	１回目	１回目	２回目	２回目
投げる人	A	B	A	B
出す目	何でもよい	A の１回目と異なる目	B の１回目と異なる目	A の２回目と同じ目

　求める確率は

$$1\times\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$

問２　$k\geqq2$ で、B がさいころを k 回投げたところで負けるは、以下の表より

回数	１回目	１回目	２回目	２回目	……
投げる人	A	B	A	B	……
出す目	何でもよい	A の１回目と異なる目	B の１回目と異なる目	A の２回目と異なる目	……

……	$k-1$ 回目	$k-1$ 回目	k 回目	k 回目
……	A	B	A	B
……	B の $k-2$ 回目と異なる目	A の $k-1$ 回目と異なる目	B の $k-1$ 回目と異なる	A の k 回目と同じ目

　求める確率は

$$1\times\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}\quad(k=1 \text{ のときも成立})$$

問３　$(\text{B が負ける確率})=\left(\begin{array}{c}\text{B が１回目}\\ \text{に負ける確率}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{B が２回目}\\ \text{に負ける確率}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{B が３回目}\\ \text{に負ける確率}\end{array}\right)+\cdots\cdots$

　より、問２から、求める確率は

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}$$

$$=\frac{6}{11}$$

問４　$\left(\begin{array}{c}\text{B が１回目}\\ \text{に負ける確率}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{B が２回目}\\ \text{に負ける確率}\end{array}\right)+\cdots\cdots+\left(\begin{array}{c}\text{B が } n \text{ 回目}\\ \text{に負ける確率}\end{array}\right)>\frac{1}{2}$ より

　問２から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}>\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}>\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^n}{1-\frac{25}{36}}>\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{6}{11}\left\{1-\left(\frac{26}{36}\right)^n\right\}>\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \left(\frac{25}{36}\right)^n<\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ \log_{10}\left(\frac{25}{36}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ n(\log_{10}25-\log_{10}36)<-\log_{10}12$$

$$\therefore\ n(2\log_{10}5-2\log_{10}6)<-(2\log_{10}2+\log_{10}3)$$

$$\therefore\ 2n\left\{\left(\log_{10}\frac{10}{2}\right)-(\log_{10}2+\log_{10}3)\right\}<-(2\log_{10}2+\log_{10}3)$$

$$\therefore\ 2n\{(1-\log_{10}2)-(\log_{10}2+\log_{10}3)\}<-(2\log_{10}2+\log_{10}3)$$

$$\therefore\ 2n\{1-2\log_{10}2-\log_{10}3\}<-(2\log_{10}2+\log_{10}3)$$

$$\therefore\ 2n(1-1.0791)<-1.0791$$

$$\therefore\ n>\frac{1.0791}{0.1582}\ (\fallingdotseq 6.82\cdots\cdots)$$

よって、n は自然数より、$n\geqq7$