◇２０２１年　埼玉医科大学　前期

1 次の問い（問1、2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問1　$y=\sqrt{x+a}$ と $y=|-x+a|$ の共有点の個数を n とする。$k=\dfrac{\boxed{1}\,\boxed{2}}{\boxed{3}}$ とすると、$a=k$ のとき $n=\boxed{4}$、$a>k$ のとき $n=\boxed{5}$、$a<k$ のとき $n=\boxed{6}$ である。

問2　α を $0<\alpha<\pi$ の定数とする。$a>0$、$b>0$ とき、$\dfrac{2b}{3a}+\dfrac{9a}{8b}+\tan\alpha$ が最小値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとるとすると、$\alpha=\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$ である。また、そのときの a、b、α に対して

$\tan\beta=\dfrac{b}{a}$ とすると、

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{11}\,\boxed{12}}$$

である。

解説

問1　$a>0$ のとき（図1）から a を小さくしていくと、以下の図1→図4のように動く。

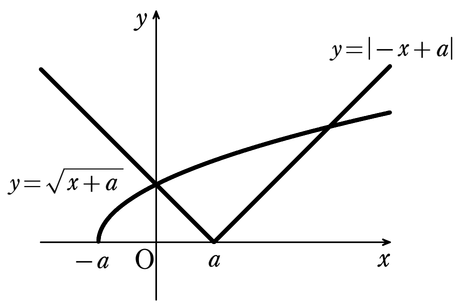


図1 $(a>0)$

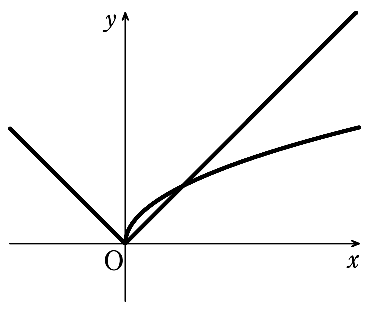


図2 $(a=0)$

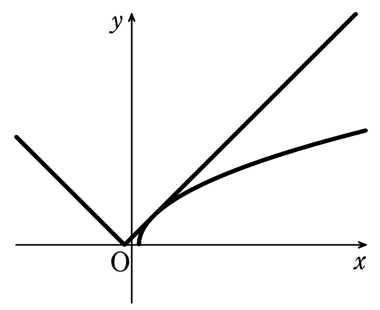


図3 $(a<0)$

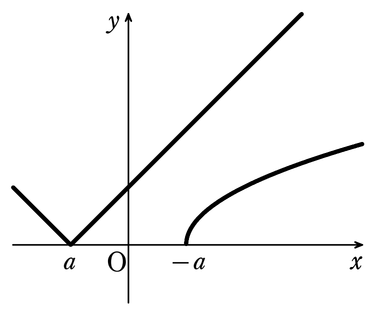


図4 $(a<0)$

$y=\sqrt{x+a}$ と $y=|-x+a|$ が接するのは、図3より

$a<0$ で $y=\sqrt{x+a}$ と $y=x-a$ が接するときである。

よって、$\sqrt{x+a}=x-a$

両辺正より

$$x+a=(x-a)^2$$

$$\therefore\ x^2-(2a+1)x+x^2-a=0$$

よって、$D=(2a+1)^2-4(a^2-a)=0$

$$\therefore\ 8a+1=0$$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{8}\quad(a<0\text{ より、適する})$$

よって、図1～4より、$k=-\dfrac{1}{8}$ として

$$\begin{cases} a=k\text{ のとき、}n=1 \\ a>k\text{ のとき、}n=2 \\ a<k\text{ のとき、}n=0 \end{cases}$$

別解　$y=\sqrt{x+a}$ と $y=|-x+a|$ が接するのは、図3より

$a<0$ で $y=\sqrt{x+a}$ と $y=x-a$ が接するときである。

つまり、$a>0$ で $y=\sqrt{x+a}$ の接線の傾きが1になるときである。

よって、$y=\sqrt{x+a}$ より

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+a}}$$

よって、接点を $(t,\ \sqrt{t+a})$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{t+a}}=1 & \cdots\cdots ① \\ \sqrt{t+a}=t-a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。

①より、$\sqrt{t+a}=\dfrac{1}{2}$ ………③

②に代入して

$$\frac{1}{2}=t-a$$

$$\therefore\ t=a+\frac{1}{2}$$

③に代入して、$\sqrt{2a+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ 2a+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{8}\quad(a<0\text{ より、適する})$$

よって、図1～4より、$k=-\dfrac{1}{8}$ として

$$\begin{cases} a=k\text{ のとき、}n=1 \\ a>k\text{ のとき、}n=2 \\ a<k\text{ のとき、}n=0 \end{cases}$$

問2　$a>0$、$b>0$ より、相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{2b}{3a}+\frac{9a}{8b}+\tan\alpha \geqq 2\sqrt{\frac{2b}{3a}\cdot\frac{9a}{8b}}+\tan\alpha=\sqrt{3}+\tan\alpha$$

等号は、$\dfrac{2b}{3a}=\dfrac{9a}{8b}$ のとき

つまり、$16b^2=27a^2$

$a>0$、$b>0$ より、$4b=3\sqrt{3}\,a$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ………①　のとき、成立する。

このとき、最小値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より

$$\sqrt{3}+\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \tan\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0<\alpha<\pi$ より、$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$

また、$\tan\beta=\dfrac{b}{a}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ より　（∵①）

よって、$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{21}$$

2 次の問い (問 1 ～ 3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$a>0$ として、関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_{x}^{x+a}(t^4-4)dt$$

とする

問 1　$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=a\left(\boxed{13}\,x+\boxed{14}\right)\left(\boxed{15}\,x^2+\boxed{16}\,ax+\boxed{17}\,a^2\right)$$

である。

問 2　$f'(x)=0$ を満たす実数 x は

$$x=\frac{\boxed{18}\,\boxed{29}}{\boxed{20}}\,a$$

である。

問 3　$a=2$ のとき、$f(x)$ の最小値は

$$\frac{\boxed{21}\,\boxed{22}\,\boxed{23}}{\boxed{24}}$$

である。

解説

問 1　$f(x)=\int_{x}^{x+a}(t^4-4)dt$ を x で微分して

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+a)'\cdot\{(x+a)^4-4\}-x'\cdot(x^4-4)\\&=(x+a)^4-x^4\\&=\{(x+a)^2-x^2\}\cdot\{(x+a)^2+x^2\}\\&=(2ax+a^2)(2x^2+2ax+a^2)\\&=a(2x+a)(2x^2+2ax+a^2)\end{aligned}$$

問 2　$f'(x)=0$ より

$$a(2x+a)(2x^2+2ax+a^2)=0$$

$2x^2+2ax+a^2=2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{2}>0$ より

$$x=-\frac{1}{2}a$$

問 3　問 1、問 2 より

$a=2$ での $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x		-1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

よって、$f(-1)=\int_{-1}^{1}(t^4-4)dt$

$$\begin{aligned}&=2\int_{0}^{1}(t^4-4)dt\\&=2\left[\frac{1}{5}t^5-4t\right]_0^1\\&=-\frac{38}{5}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 次の問い（問１～４）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

半径１の円に内接する四角形 ABCD において、対角線 AC と BD の交点を E とする。

また、$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{BE}{ED}=\dfrac{4}{3}$、$\angle BAD=60^\circ$ とする。

問１　$BD=\sqrt{\boxed{25}}$ であり、$AB=\dfrac{\boxed{26}\sqrt{\boxed{27}\boxed{28}}}{\boxed{29}}$ である。

問２　$AE=\dfrac{\boxed{30}\sqrt{\boxed{31}}}{\boxed{32}}$ である。

問３　三角形ABD の面積は

$$\frac{\boxed{33}\sqrt{\boxed{34}}}{\boxed{35}\boxed{36}}$$

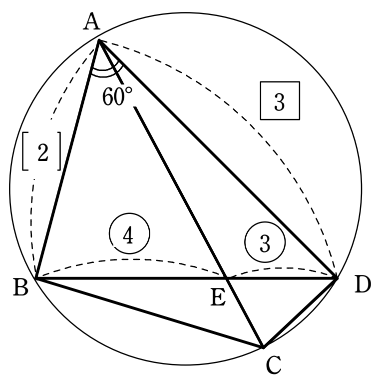
である。

問４　三角形 BCD の面積は

$$\frac{\boxed{37}\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}\boxed{40}}$$

である。

解説



問１　△ABD で正弦定理より

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ}=2\cdot 1$$

$$\therefore\ BD=\sqrt{3}$$

$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{2}{3}$ より、$AB:AD=2:3$

よって、$AB=2x$、$AD=3x$ とおくと $(x>0)$

△ABD で余弦定理より

$$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD$$

$$\therefore\ 3=4x^2+9x^2-2\cdot 2x\cdot 3x\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 7x^2=3$$

$x>0$ より、$x=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

よって、$AB=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$、$AD=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

問２　△ABD で余弦定理より

$$AD^2=BA^2+BD^2-2\cdot BA\cdot BD\cdot\cos\angle ABD$$

$$\therefore\ 9x^2=4x^2+3-2\cdot 2x\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\angle ABD$$

$$\therefore\ \cos\angle ABD=\frac{3-5x^2}{4\sqrt{3}\cdot x}$$

$$=\frac{3-5\cdot\frac{3}{7}}{4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

△ABE で余弦定理より

$$AE^2=BE^2+BA^2-2\cdot BE\cdot BA\cdot\cos\angle ABD$$

$$=\left(\frac{4}{7}\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2-2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$=\frac{3\cdot 36}{7^2}$$

$$\therefore\ AE=\frac{6\sqrt{3}}{7}$$

別解　$\angle AEB=\theta$ とおくと

△ABEで余弦定理より

$$AB^2=BE^2+AE^2-2\cdot BE\cdot AE\cdot\cos\theta$$

$$\therefore\ \left(\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2+AE^2-2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot AE\cdot\cos\theta$$

$$\therefore\ \frac{36}{7^2}=AE^2-2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot AE\cdot\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots ①$$

△ADE で余弦定理より

$$AD^2=DE^2+AE^2-2\cdot DE\cdot AE\cdot\cos(180^\circ-\theta)$$

$$\therefore\ \left(\frac{3\sqrt{21}}{7}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2+AE^2+2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{7}\cdot AE\cdot\cos\theta$$

$$\therefore\ \frac{9\cdot 18}{7^2}=AE^2+2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{7}\cdot AE\cdot\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①×３＋②×４ より

$$\frac{18(2\cdot 3+9\cdot 4)}{7^2}=7AE^2$$

$$\therefore\ 7AE^2=\frac{18\cdot 42}{7^2}$$

$$\therefore\ AE=\frac{6\sqrt{3}}{7}$$

問３　△ABD の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{14}$$

問４　方べきの定理より

$$BE\cdot ED=AE\cdot EC$$

$$\therefore\ \frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{7}=\frac{6\sqrt{3}}{7}\cdot EC$$

$$\therefore\ EC=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

よって、$AE:EC=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}:\dfrac{2\sqrt{3}}{7}=3:1$ より

$$\triangle ABD:\triangle BCD=AE:EC$$

$$=3:1$$

よって、$\triangle BCD=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle BCD$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

別解　△ABE ∽ △DCE より

$$AB:DC=EA:ED$$

$$\therefore\ \frac{2\sqrt{21}}{7}:CD=\frac{6\sqrt{3}}{7}:\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore\ CD=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

△ADE ∽ △BCE より

$$AD:BC=AE:BE$$

$$\therefore\ \frac{3\sqrt{21}}{7}:BC=\frac{6\sqrt{3}}{7}:\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore\ CB=\frac{2\sqrt{21}}{7}$$

よって、$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot CB\cdot CD\cdot\sin 120^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

4 次の文章を読み、下の問い（問１～４）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

ある感染症について、以下のような仮定のもとに感染者数を考察した。

仮定 0：感染した人は回復することなく、ずっと感染したままである。
仮定 1：はじめに 1 人が感染した。この日を第 1 日目とする。
仮定 2：第 2 日目は 1 人も感染しなかった。
仮定 3：n を自然数として、第 $(n+2)$ 日目に新たに感染する人は、第 n 日目までの全感染者数の 2 倍である

問１　第 n 日目の全感染者数を S_n とする。このとき、漸化式

$$S_{n+2}=\boxed{41}\,S_{n+1}+\boxed{42}\,S_n$$

を満たす。

問２　関係式

$$S_{n+2}-\alpha S_{n+1}=\beta(S_{n+1}-\alpha S_n)$$

を満たすような α、β を求めると、

$$\alpha=\boxed{43}\,\boxed{44}、\beta=\boxed{45}$$

である。ただし、$\alpha<\beta$ とする。

問３　m を自然数とする。

$$a_m=S_{m+1}-\alpha S_m、b_m=S_{m+1}-\beta S_m$$

とおくと、

$$a_n=\boxed{46}、b_n=\left(\boxed{47}\,\boxed{48}\right)^n$$

である。

問４　全感染者数が初めて 1 万人を超えるのは第 $\boxed{49}\,\boxed{50}$ 日目である。

解説

問１　仮定より、第 $(n+2)$ 日目の全感染者数は、第 $(n+1)$ 日までの全感染者数に、第 n 日までの全感染者数の 2 倍を足したものより

$$S_{n+2}=S_{n+1}+2S_n \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

問２　$x^2=x+2$ より

$$x^2-x-2=0$$

$$\therefore\ (x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore\ x=2、-1$$

よって、① は

$$\begin{cases} S_{n+2}+S_{n+1}=2(S_{n+1}+S_n) & \cdots\cdots\cdots ② \\ S_{n+2}-2S_{n+1}=-(S_{n+1}-2S_n) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

と変形できる。

よって、$\alpha=-1$、$\beta=2$

問３　仮定 1、2 より、$S_1=S_2=1$

② より

$$S_{n+1}+S_n=2^{n-1}(S_2+S_1)$$
$$=2^n \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

よって、$a_n=2^n$

③ より

$$S_{n+1}-2S_n=(-1)^{n-1}(S_2-2S_1)$$
$$=(-1)^n \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

よって、$b_n=(-1)^n$

問４　④ − ⑤ より

$$3S_n=2^n-(-1)^n$$

$$\therefore\ S_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

$S_n>10^4$ より

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3}>10^4$$

$$\therefore\ 2^n-(-1)^n>30000$$

$n=14$ のとき

$$2^{14}-1=16383<30000$$

$n=15$ のとき

$$2^{15}+1=32769>30000$$

$2^n-(-1)^n$ は単調増加より、初めて S_n が 10^4 を超えるのは、$n=15$