1 袋の中に 0、1、2、3 という 1 つの番号が書かれたカードがそれぞれ 2 枚ずつ、合計 8 枚入っている。この袋からカードを 4 枚続けて取り出す。ただし、取り出したカードは袋に戻さない。カードに書かれた番号を取り出した順に a、b、c、d とするとき、以下の問いに答えよ。答えのみでよい。有理数は既約分数に直すこと。

問 1　$abcd=0$ となる確率を求めよ。

問 2　$ab+bc+cd=0$ となる確率を求めよ。

問 3　$a^3+b^3+c^3+d^3$ が 5 の倍数 となる確率を求めよ。

問 4　$ab^2+b^2c+cd^2+d^2a$ が 5 の倍数 となる確率を求めよ。

解説

問 1　$abcd=0$ となるのは、a、b、c、d のうち少なくとも 1 つは 0 になることより

求める確率は

$$1-\frac{{}_6P_4}{{}_8P_4}=1-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{8\cdot7\cdot6\cdot5}$$
$$=1-\frac{3}{14}$$
$$=\frac{11}{14}$$

問 2　$ab+bc+cd=0$ となるのは

（ｉ）　$a=0$ かつ、$c=0$

（ⅱ）　$b=0$ かつ、$c=0$ または、$d=0$

のときである。

（ｉ）のとき

$$\frac{2\times{}_6P_2}{{}_8P_4}=\frac{2\times6\cdot5}{8\cdot7\cdot6\cdot5}$$
$$=\frac{1}{28}$$

（ⅱ）のとき、（ｉ）と同様にして

$$\frac{1}{28}\times2=\frac{2}{28}$$

よって、（ｉ）、（ⅱ）より、、求める確率は

$$\frac{1+2}{28}=\frac{3}{28}$$

問 3　$a^3+b^3+c^3+d^3$ が 5 の倍数 となるのは、a、b、c、d の内訳が

（ｉ）　0 が 2 個、2 が 1 個、3 が 1 個

（ⅱ）　0 が 1 個、1 が 2 個、3 が 1 個

（ⅲ）　0 が 1 個、1 が 1 個、2 が 2 個

（ⅳ）　2 が 2 個、3 が 2 個

のときである。

（ｉ）のとき

$$\frac{2\times2\times4!}{{}_8P_4}=\frac{4\cdot4!}{{}_8P_4}$$

（ⅱ）、（ⅲ）のとき、（ｉ）と同様にしてそれぞれ

$$\frac{2\times2\times4!}{{}_8P_4}=\frac{4\cdot4!}{{}_8P_4}$$

（ⅳ）のとき

$$\frac{4!}{{}_8P_4}$$

（ｉ）～（ⅳ）より、求める確率は

$$\frac{4!\times(4+4+4+1)}{{}_8P_4}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot17}{8\cdot7\cdot6\cdot5}$$
$$=\frac{17}{70}$$

問 4　$ab^2+b^2c+cd^2+d^2a=b^2(a+c)+d^2(c+a)$
$$=(a+c)(b^2+d^2)$$

$a+c$ が 5 の倍数となる事象をA、b^2+d^2 が 5 の倍数となる事象を B とすると

事象 A が起こるのは、a、c の内訳が

（ｉ）　両方とも 0

（ⅱ）　2 が 1 個、3 が 1 個

のときである。

（ｉ）のとき

$$\frac{2!}{{}_8P_2}=\frac{2}{{}_8P_2}$$

（ⅱ）のとき

$$\frac{2\times2\times2!}{{}_8P_2}=\frac{8}{{}_8P_2}$$

（ｉ）、（ⅱ）より、事象A が起こる確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{2+8}{{}_8P_2}$$
$$=\frac{10}{8\cdot7}$$
$$=\frac{5}{28}$$

事象 B が起こるのは、b、d の内訳が

（ｉ）　両方とも 0

（ⅱ）　1 が 1 個、2 が 1 個

（ⅲ）　1 が 1 個、3 が 1 個

のときである。

（ｉ）のとき

$$\frac{2!}{{}_8P_2}=\frac{2}{{}_8P_2}$$

（ⅱ）、（ⅲ）のとき、それぞれ

$$\frac{2\times2\times2!}{{}_8P_2}=\frac{8}{{}_8P_2}$$

（ｉ）、（ⅱ）より、事象B が起こる確率 $P(B)$ は

$$\frac{2+8\times2}{{}_8P_2}=\frac{18}{8\cdot7}$$
$$=\frac{9}{28}$$

事象A かつ事象B が起こるのは

（ｉ）　a、c の内訳が、両方とも 0 のとき

b、d の内訳が $\begin{cases}①：1\text{ が }1\text{ 個、}2\text{ が }1\text{ 個}\\②：1\text{ が }1\text{ 個、}3\text{ が }1\text{ 個}\end{cases}$

（ⅱ）　a、c の内訳が、2 が 1 個、3 が 1 個のとき

b、d の内訳が $\begin{cases}①：\text{両方とも }0\\②：1\text{ が }1\text{ 個、}2\text{ が }1\text{ 個}\\③：1\text{ が }1\text{ 個、}3\text{ が }1\text{ 個}\end{cases}$

のときである。

（ｉ）－ ①、② のとき、それぞれ

$$\frac{2!\times(2\times2\times2!)}{{}_8P_4}=\frac{16}{{}_8P_4}$$

（ⅱ）－ ① のとき

$$\frac{(2\times2\times2!)\times2!}{{}_8P_4}=\frac{16}{{}_8P_4}$$

（ⅱ）－ ②、③ のとき、それぞれ

$$\frac{(2\times{}_2C_1\times2!)\times(2\times{}_1C_1\times2!)}{{}_8P_4}=\frac{32}{{}_8P_4}$$

よって、（ｉ）、（ⅱ）より、事象A と事象B が同時に起こる確率 $P(A\cap B)$ は

$$P(A\cap B)=\frac{16\times3+32\times2}{{}_8P_4}$$
$$=\frac{112}{8\cdot7\cdot6\cdot5}$$
$$=\frac{1}{15}$$

以上より、求める確率は

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{28}+\frac{9}{28}-\frac{1}{15}$$
$$=\frac{13}{30}$$

2　以下の文章中の空欄に適する数値や数式を解答欄に記入せよ。なお、$\boxed{\text{ク}}$ に関してはその導出過程も解答欄に記述せよ。

　O を原点とする xyz 空間において $\mathrm{A}(a,0,0)$、$\mathrm{B}(0,b,0)$、$\mathrm{P}(a,b,0)$ $(a>0,\ b>0)$ として、長方形 OAPB を対角線 OP を軸として 1 回転させる。
B は平面 $\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}}\,y=\boxed{\text{ウ}}$ 上の中心 $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}},\ 0\right)$、半径 $\boxed{\text{カ}}$ の円周上を動く（以下この円を C とする）。xy 平面に垂直で対角線 OP を含む平面と円 C の交点の 1 つを Q とするとき、線分 AQ の長さは $\boxed{\text{キ}}$ となる。特に P が

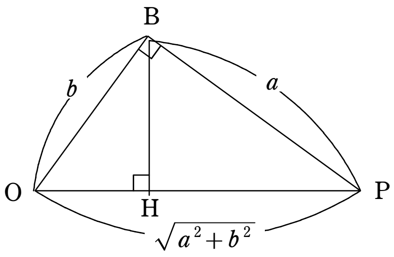
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

を満たしながら動くとき、線分 AQ の長さの最小値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

解説

B から OP に下した垂線の足を H とする。
長方形 OAPB を対角線 OP を軸として 1 回転させたとき、B は H を中心とする半径 BH の円周上を動く。
よって、B が動く平面の方程式は

$$ax+b(y-b)=0$$
$$\therefore\ ax+by=b^2$$



また、H は直線 OP : $y=\dfrac{b}{a}x$ と

直線 BH : $y=-\dfrac{a}{b}x+b$ との交点より

$$\frac{b}{a}x=-\frac{a}{b}x+b$$
$$\therefore\ (a^2+b^2)x=ab^2$$
$$\therefore\ x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

よって、$y=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}=\dfrac{b^3}{a^2+b^2}$ より

中心 H の座標は、$\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{b^3}{a^2+b^2},\ 0\right)$

半径は、△OBH ∽ △OPB より

$$\mathrm{OB}:\mathrm{BH}=\mathrm{OP}:\mathrm{PB}$$
$$\therefore\ b:\mathrm{BH}=\sqrt{a^2+b^2}:a$$
$$\therefore\ \mathrm{BH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

以上より、B は

平面 $ax+by=b^2$ 上の中心 $\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{b^3}{a^2+b^2},\ 0\right)$、半径 $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ の円周を動く。

Q は H から z 方向に BH だけ平行移動した点より、Q の座標は

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}-a,\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

よって、
$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=\frac{a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$
$$=\frac{a^6+b^6+a^4b^2+a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)^3-3a^4b^2-3a^2b^4+a^4b^2+a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)^3-2a^4b^2-2a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)^3-2a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2}{a^2+b^2}\quad\cdots\cdots①$$
$$=\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$$
$$\therefore\ \mathrm{AQ}=\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$$

また、$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ を満たしながら動くとき

つまり、$a^2+b^2=a^2b^2$ ……… ② を満たしながら動くとき

① から、
$$\mathrm{AQ}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2}{a^2+b^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(a^2b^2)^2-2a^2b^2}{a^2b^2}}\quad(\because ②)$$
$$=\sqrt{a^2b^2-2}$$

ここで、$\dfrac{1}{a^2}>0$、$\dfrac{1}{b^2}>0$ より

相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}\geqq\frac{2}{\sqrt{ab}}$$
$$\therefore\ 1\geqq\frac{2}{\sqrt{ab}}$$
$$\therefore\ ab\geqq 2$$

等号は、$\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{b^2}$ のとき

つまり、$a>0$、$b>0$、② より、$a=b=\sqrt{2}$ のとき成立する。

よって、AQ は、$a=b=\sqrt{2}$ のとき、最小値 $\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$ となる。

参考　(ア)〜(ウ)

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直で、点 $\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$ を通る平面の方程式は

$$a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0$$

別解　(ア)〜(ウ)

H を中心として半径 BH の円周上の点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$$
$$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\y-b\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=0$$
$$\therefore\ ax+b(y-b)=0$$
$$\therefore\ ax+by=b^2$$

別解　(エ)〜(カ)

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルなので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$$

よって、中心 H の座標は、$\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{b^3}{a^2+b^2},\ 0\right)$

また、△OPB より、$\sin\angle\mathrm{BOP}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるので

△OBH より、$\mathrm{BH}=\mathrm{OB}\times\sin\angle\mathrm{BOP}$

$$=b\times\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

別解　(ク)：$\mathrm{AQ}=\sqrt{a^2b^2-2}$ の続きから

② より、$(a-b)^2+2ab=a^2b^2$

$$\therefore\ a^2b^2-2ab=(a-b)^2$$

$(a-b)^2\geqq 0$ より

$$a^2b^2-2ab\geqq 0$$
$$\therefore\ ab(ab-2)\geqq 0$$

$ab>0$ より、$ab\geqq 2$　(等号は $a=b$ のとき成立)

以下略

3 関数 $f(x)=(\log x)^2+2\log x\ (x>0)$ に対し、方程式 $f(x)=0$ の解のうち最小の値を a とし、$a \leqq x \leqq t$ における $|f(x)|$ の最大値を $M(t)$ とする。また定積分 I を

$$I=\int_a^{\frac{1}{a}} M(t)dt$$

とするとき、以下の各問いに答えよ。

問１　$f(x)$ の極小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問２　a の値を求めよ。答えのみでよい。

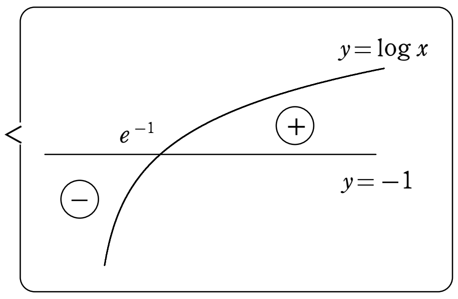
問３　$M(t)$ を求めよ。

問４　I の値を求めよ。

(解説)

問１　$f(x)=(\log x)^2+2\log x\ (x>0)$ より

$$f'(x)=\frac{2}{x}\log x+\frac{2}{x}$$
$$=\frac{2}{x}(\log x+1) \text{ より}$$



増減表は以下のようになる。

x	0		e^{-1}	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	-1	↗

よって、$x=e^{-1}$ で極小値 -1 をとる。

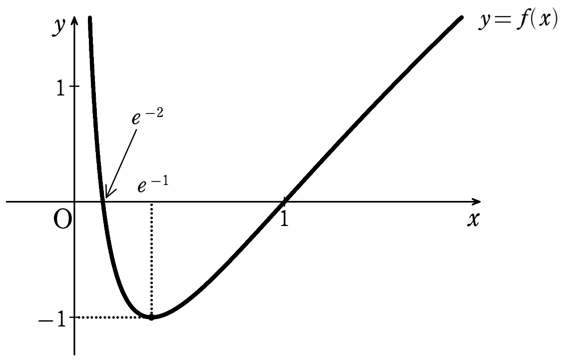
問２　$f(x)=0$ より

$$(\log x)^2+2\log x=0$$
$$\therefore\ (\log x)(\log x+2)=0$$
$$\therefore\ \log x=0、-2$$
$$\therefore\ x=1、e^{-2}$$

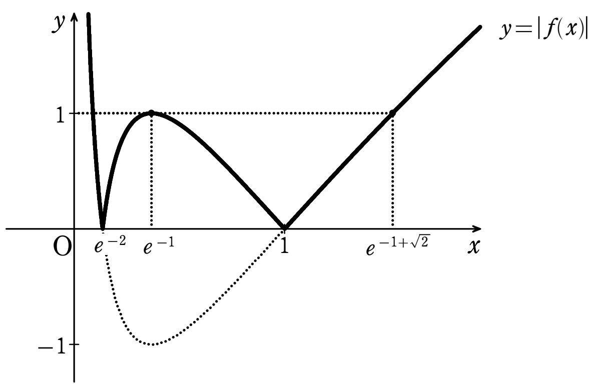
$e^{-2}<1$ より、$a=e^{-2}$

問３　$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}(\log x)^2\left(1+\frac{2}{\log x}\right)=\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \end{cases}$　と、問１から

$y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



よって、$y=|f(x)|$ のグラフは、以下のようになる。



ここで、$f(x)=1$ のとき

$$(\log x)^2+2\log x=1$$
$$\therefore\ (\log x)^2+2\log x-1=0$$
$$\therefore\ \log x=\frac{-2+\sqrt{4+4}}{2}$$
$$\therefore\ \log x=-1\pm\sqrt{2}$$
$$\therefore\ x=e^{-1\pm\sqrt{2}} \quad \text{より}$$

$e^{-2} \leqq x \leqq t$ における最大値 $M(t)$ は

（ i ）$e^{-2} \leqq t \leqq e^{-1}$ のとき

$M(t)=-(\log x)^2-2\log t$

（ ii ）$e^{-1}<t \leqq e^{-1+\sqrt{2}}$ のとき

$M(t)=1$

（iii）$e^{-1+\sqrt{2}}<t$ のとき

$M(t)=(\log t)^2+2\log t$

問４　問３から

$$I=\int_a^{\frac{1}{a}} M(t)dt$$
$$=\int_{e^{-2}}^{e^2} M(t)dt$$
$$=\int_{e^{-2}}^{e^{-2}}\{-(\log t)^2-2\log t\}dt+\int_{e^{-1}}^{e^{-1+\sqrt{2}}} 1\cdot dt+\int_{e^{-1+\sqrt{2}}}^{e^2}\{(\log t)^2+2\log t\}dt$$

ここで

$$\int\{(\log t)^2+2\log t\}dt=\int t'(\log t)^2dt+2\int \log t\,dt$$
$$=t(\log t)^2-\int t\cdot\frac{2}{t}\log t\,dt+2\int \log t\,dt$$
$$=t(\log t)^2+C\ (\text{積分定数})\quad \text{より}$$

$$I=\Big[-t(\log t)^2\Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}}+\Big[t\Big]_{e^{-1}}^{e^{-1+\sqrt{2}}}+\Big[t(\log t)^2\Big]_{e^{-1+\sqrt{2}}}^{e^2}$$
$$=4e^2+2(\sqrt{2}-1)e^{-1+\sqrt{2}}-2e^{-1}+4e^{-2}$$

4 $i=\sqrt{-1}$ を虚数単位とし、複素数 z に共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。原点を O とする複素数平面上において、次の 3 つの条件で定まる図形を C とする。

$$|z^2-1|=1、\frac{z+\overline{z}}{2}>0、\frac{z-\overline{z}}{2i}>0$$

C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して、点 $\mathrm{Q}(\overline{z})$ を通り直線 OQ と垂直な直線を L とし、直線 OP と直線 L の交点を $\mathrm{A}(\alpha)$ とする。また、点 $\mathrm{B}(\beta)$ を、原点と点 $\mathrm{R}(z^2)$ を通る直線上の点であり、かつ、直線 AB と直線 L が垂直となるようにとる。

z の絶対値を r とし、z の偏角を $\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とするとき、以下の各問いに答えよ。

問 1　θ がとりうる値の範囲を求めよ。また、r を θ の関数として表せ。答えのみでよい。

問 2　$\cos\theta$、$\sin\theta$ をそれぞれ r の関数として表せ。答えのみでよい。

問 3　$|\alpha|$ を r の関数として表せ。答えのみでよい。

問 4　$|\beta|$ を r の関数として表せ。

問 5　点 $\mathrm{P}(z)$ が C 上を動くとき、$|z|^2\left|\dfrac{z}{\alpha}-1\right|\left|\dfrac{\beta}{\alpha}-1\right|$ の最大値と、最大値をとる複素数 z に対する r の値を答えよ。

解説

問 1　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0)$ より、$|z^2-1|=1$ から

$$|r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2-1|=1$$
$$\therefore\ |r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)-1|=1$$
$$\therefore\ |(r^2\cos2\theta-1)+i\cdot r^2\sin2\theta|=1$$
$$\therefore\ (r^2\cos2\theta-1)^2+r^4\sin^22\theta=1$$
$$\therefore\ r^4(\cos^22\theta+\sin^22\theta)-2r^2\cos2\theta=0$$
$$\therefore\ r^2(r^2-2\cos2\theta)=0$$
$$\therefore\ r^2=0、r^2=2\cos2\theta$$

$r>0$ より、$r^2=2\cos2\theta$　………①

ここで、$\dfrac{z+\overline{z}}{2}>0$ より

$$\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)+r(\cos\theta+-i\sin\theta)}{2}=r\cos\theta>0$$

$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}>0$ より

$$\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)-r(\cos\theta+-i\sin\theta)}{2i}=r\sin\theta>0$$

よって、$r>0$ から、$\cos\theta>0$、$\sin\theta>0$ より、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

また、① と $r^2>0$ から

$$2\cos2\theta>0$$
$$\therefore\ \cos2\theta>0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より、$0<2\theta<\pi$

よって、$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より、$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

このとき、① より、$r=\sqrt{2\cos2\theta}$

参考　$z=x+yi$（x、y は実数）………②　とおくと

$\overline{z}=x-yi$ ………③　より

②、③ を連立すると

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}、y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

となるので、$\dfrac{z+\overline{z}}{2}>0$、$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}>0$ より、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる。

問 2　① より

$$r^2=2(2\cos^2\theta-1)$$
$$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{2+r^2}{4}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より、$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2+r^2}}{2}$

また、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

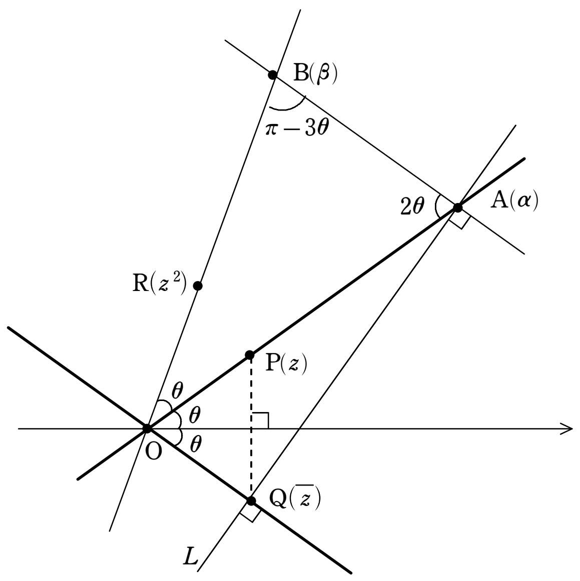
$$\sin^2\theta+\frac{2+r^2}{4}=1$$
$$\therefore\ \sin^2\theta=\frac{2-r^2}{4}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より、$\sin^2\theta>0$

よって、$\dfrac{2-r^2}{4}>0$、$r>0$ より、$0<r<\sqrt{2}$　………④

このとき、$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2-r^2}}{2}$

問 3　$z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$ を考慮すると、図は以下のようになる。



$\triangle$OAQ より、$\cos2\theta=\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OA}}$

$$\frac{r^2}{2}=\frac{r}{|\alpha|}\qquad(\because\ ①、\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}=r)$$
$$\therefore\ |\alpha|=\frac{2}{r}$$

問 4　$\triangle$OAB で正弦定理より

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin\angle\mathrm{OBA}}=\frac{\mathrm{OB}}{\sin\angle\mathrm{OAB}}$$
$$\therefore\ \frac{\frac{2}{r}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{|\beta|}{\sin2\theta}$$
$$\therefore\ |\beta|=\frac{2}{r}\cdot\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$
$$=\frac{2}{r}\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$$
$$=\frac{2}{r}\cdot\frac{2\cos\theta}{3-4\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2}{r}\cdot\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2+r^2}}{2}}{3-4\cdot\frac{2-r^2}{4}}\qquad(\because\ 問 2)$$
$$=\frac{2\sqrt{2+r^2}}{r(1+r^2)}$$

問 5　$I=|z|^2\left|\dfrac{z}{\alpha}-1\right|\left|\dfrac{\beta}{\alpha}-1\right|$ とおくと

$$I=|z|^2\cdot\frac{|z-\alpha|}{|\alpha|}\cdot\frac{|\beta-\alpha|}{|\alpha|}$$
$$=\frac{|z|^2}{|\alpha|^2}\cdot|z-\alpha|\cdot|\beta-\alpha|$$

ここで、$|z-\alpha|=\mathrm{AP}$

$$=\mathrm{OA}-\mathrm{OP}$$
$$=\frac{2}{r}-r\quad(④ を満たす)$$

また、$|\beta-\alpha|=\mathrm{AB}$ より、$\triangle$OAB で正弦定理から

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AOB}}=\frac{\mathrm{OB}}{\sin\angle\mathrm{OAB}}$$
$$\therefore\ \frac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=\frac{|\beta|}{\sin2\theta}$$
$$\therefore\ \mathrm{AB}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\cdot|\beta|$$
$$=\frac{|\beta|}{2\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+r^2}}\cdot\frac{2\sqrt{2+r^2}}{r(1+r^2)}$$
$$=\frac{2}{r(1+r^2)}$$

よって、$I=\dfrac{r^2}{\left(\dfrac{2}{r}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{2}{r}-r\right)\cdot\dfrac{2}{r(1+r^2)}$

$$=\frac{r^4}{4}\cdot\frac{2-r^2}{r}\cdot\frac{2}{r(1+r^2)}$$
$$=\frac{r^2(2-r^2)}{2(1+r^2)}\quad\text{………⑤}$$

$1+r^2=t\ (t>1)$ とおくと

$$I=\frac{(t-1)\{2-(t-1)\}}{2t}$$
$$=\frac{(t-1)(3-t)}{2t}$$
$$=\frac{4t-t^2-3}{2t}$$

$$=2-\left(\frac{t}{2}+\frac{3}{2t}\right)$$

ここで、$\frac{t}{2}>0$、$\frac{3}{2t}>0$ より、相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\frac{t}{2}+\frac{3}{2t} \geqq 2\sqrt{\frac{t}{2}\cdot\frac{3}{2t}}=\sqrt{3}$$

等号は、$\frac{t}{2}=\frac{3}{2t}$ のとき

$\therefore\ t^2=3$

$t>1$ より、$t=\sqrt{3}$ のとき

つまり、$1+r^2=\sqrt{3}$

$\therefore\ r^2=\sqrt{3}-1$

④より、$r=\sqrt{\sqrt{3}-1}$ のとき成立。

よって、$I=2-\left(\frac{t}{2}+\frac{3}{2t}\right) \leqq 2-\sqrt{3}$ となるので

最大値 $2-\sqrt{3}$ で、最大値をとる複素数 z に対する r の値は $r=\sqrt{\sqrt{3}-1}$

参考　⑤より、$I=\dfrac{-r^4+2r^2}{2(1+r^2)}$

$$=\frac{2(1+r^2)\cdot\frac{-r^2+3}{2}-3}{2(1+r^2)}$$

$$=\frac{-r^2+3}{2}-\frac{3}{2(1+r^2)}$$

$$=\frac{-r^2-1}{2}-\frac{3}{2(1+r^2)}+2$$

$$=2-\left\{\frac{1+r^2}{2}+\frac{3}{2(1+r^2)}\right\}$$

として、相加平均・相乗平均の大小関係を利用してもよい

別解　⑤の続き

$r^2=t$ とおくと（④より、$0<t<2$）

$$I=\frac{t(2-t)}{2(1+t)}$$

$$I'=\frac{(2-2t)\cdot 2(1+t)-t(2-t)\cdot 2}{4(1+t)^2}$$

$$=\frac{-t^2-2t+2}{2(1+t)^2}$$

$$=\frac{-\{t-(-1+\sqrt{3})\}\{t-(-1-\sqrt{3})\}}{2(1+t)^2}$$ より

増減表は、以下のようになる。

t	0		$-1+\sqrt{3}$		2
I'		$+$	0	$-$	
I		↗	$2-\sqrt{3}$	↘	

$t=-1+\sqrt{3}$ のとき、④より、$r=\sqrt{\sqrt{3}-1}$ となるので、

最大値 $2-\sqrt{3}$ で、最大値をとる複素数 z に対する r の値は $r=\sqrt{\sqrt{3}-1}$