1 3枚の硬貨 X、Y、Z を同時に投げて、表裏を調べるという思考 T を繰り返し行う。座標空間内の動点 P は点 A$(a、b、c)$ から出発し、硬貨の表裏に応じて、次の規則に従って移動する。

［規則 1］ X が表の場合は x 軸方向に $+1$、裏の場合は x 軸方向に -1 だけ平行移動する。
［規則 2］ Y が表の場合は y 軸方向に $+1$、裏の場合は y 軸方向に -1 だけ平行移動する。
［規則 3］ Z が表の場合は z 軸方向に $+1$、裏の場合は z 軸方向に -1 だけ平行移動する。

このとき、以下の各問いに答えよ。

問 1　はじめに、試行 T を続けて 6 回行ったところ、X、Y、Z が表となった回数はそれぞれ、2、3、4 であり、このとき、P は原点にあったという、a、b、c の値をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 2　次に、動点 P を問 1 で定まった定点 A に戻してから、試行 T を続けて 5 回行った。このとき、点 P が次の集合に属する確率を求めよ。答えのみでよい。ただし、有理数は既約分数で表すこと。

(1)　$\{(x、y、z) \mid z=-1\}$
(2)　$\{(x、y、z) \mid y \leqq 4、z=-1\}$
(3)　$\{(x、y、z) \mid x>2、y+z=2\}$

解説

問 1　X、Y、Z が表となった回数がそれぞれ、2、3、4 より、裏の回数はそれぞれ 4、3、2 となる。

よって、P は A$(a、b、c)$ からスタートして、x 軸方向に-2、y 軸方向に 0、z 軸方向に $+2$ 平行移動して、原点に移動したことになる。

よって、$\begin{pmatrix} a-2 \\ b \\ c+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$　より、$a=2$、$b=0$、$c=-2$

問 2　A$(2、0、-2)$ から試行 T を 5 回行うとき、硬貨 X、Y、Z が表となった回数をそれぞれ p、q、r 回（p、q、r は 0 以上 5 以下の整数）とすると

P の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot p+(-1)\cdot(5-p)+2 \\ 1\cdot q+(-1)\cdot(5-q) \\ 1\cdot r+(-1)\cdot(5-r)-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2p-3 \\ 2q-5 \\ 2r-7 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

(1)　硬貨 X、Y は、z 軸方向に影響しないので、$z=-1$ より、① から

$2r-7=-1$

$\therefore\ r=3$

よって、硬貨 Z は表が 3 回、裏が 2 回となればよいので、求める確率は

$${}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(2)　硬貨 X は y、z 軸方向に影響しないので

$y \leqq 4$ より、① から

$2q-5 \leqq 4$

$\therefore\ q \leqq \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ q=0、1、2、3、4$

よって、硬貨 Y の表の回数が 4 回以下となる確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$$

また、$z=-1$ より、① から

$2r-7=-1$

$\therefore\ r=3$

硬貨 Z は表が 3 回、裏が 2 回とる確率は、(1) より、$\dfrac{5}{16}$

よって、求める確率は

$$\frac{31}{32}\times\frac{5}{16}=\frac{155}{512}$$

(3)　$x>2$ より、① から

$2p-3>2$

$\therefore\ p>\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ p=3、4、5$

よって、硬貨 X の表の回数が3 回以上となる確率は

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2}$$

$y+z=2$ より、① から

$(2q-5)+(2r-7)=2$

$\therefore\ q+r=7$

$\therefore\ (q、r)=(2、5)、(3、4)、(4、3)、(5、2)$　$(\because\ 0 \leqq q、r \leqq 5)$

よって、硬貨 Y、Z の表の回数の合計が 7 回となる確率は

$$2\times\left\{{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\times{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{15}{128}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{15}{128}=\frac{15}{256}$$

2 a を実数の定数とする。O を原点とする座標平面いおいて、曲線 $C:y=|x|(6-x)+x$ と直線 $L:y=5ax+a^4$ の共有点の個数を $N(a)$ とおくとき、以下の各問いに答えよ。

問１　直線 L が原点を通るような定数 a の値をすべて求めよ。答えのみでよい。

問２　曲線 C 上の点 $(1、6)$ における接線の方程式を求めよ。

問３　$N(a)$ を求めよ。

解説

問１　直線 L が原点を通るので

$$0=a^4$$

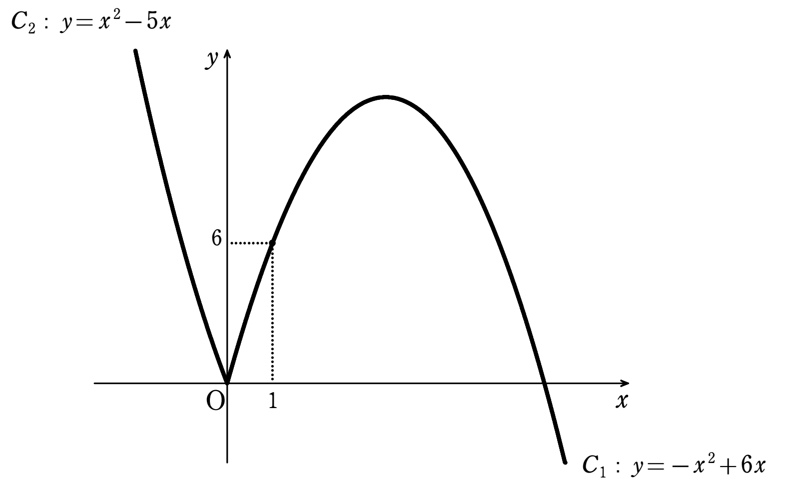
$$\therefore\quad a=0$$

問２　曲線 C は

$$y=\begin{cases} x(6-x)+x=-x^2+7x\ (x>0) \\ -x(6-x)+x=x^2-5x\ (x\leqq 0) \end{cases}$$

となるので、グラフは以下のようになる。

(以下、曲線 C_1 を $y=-x^2+6x\ (x>0)$、曲線 C_2 を $y=x^2-5x\ (x\leqq 0)$ とする)



よって、$(1、6)$ における接線は

$$y=-x^2+7x\quad より$$

$$y'=-2x+7$$

よって、$y=(-2\cdot 1+7)(x-1)+6$

$$\therefore\quad y=5(x-1)+6$$

$$\therefore\quad y=5x+1$$

問３　曲線 C と直線 L が接するときを考える。

・曲線 C_1 と直線 L が接するとき

$$-x^2+7x=5ax+a^4$$

$$\therefore\quad x^2+(5a-7)x+a^4=0\quad \cdots\cdots ①$$

重解をもてばよいので

$$D=(5a-7)^2-4\cdot 1\cdot a^4=0$$

$$\therefore\quad (5a-7-2a^2)(5a-7+2a^2)=0$$

$$\therefore\quad (2a^2-5a+7)(2a^2+5a-7)=0$$

$$2a^2-5a+7=2\left(a-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{8}>0\quad より$$

$$2a^2+5a-7=0$$

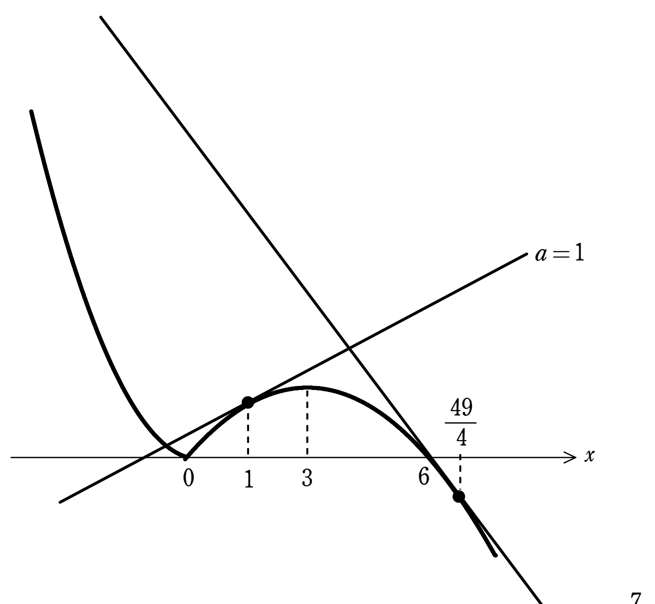
$$\therefore\quad (2a+7)(a-1)=0$$

$$\therefore\quad a=-\frac{7}{2}、1$$

よって、① より接点の x 座標は

$a=-\dfrac{7}{2}$ のとき、$x=-\dfrac{5\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)-7}{2}=\dfrac{49}{4}>0$ より適する。

$a=1$ のとき、$x=-\dfrac{5\cdot 1-7}{2}=1<0$ より適する。



・曲線 C_2 と直線 L が接するとき

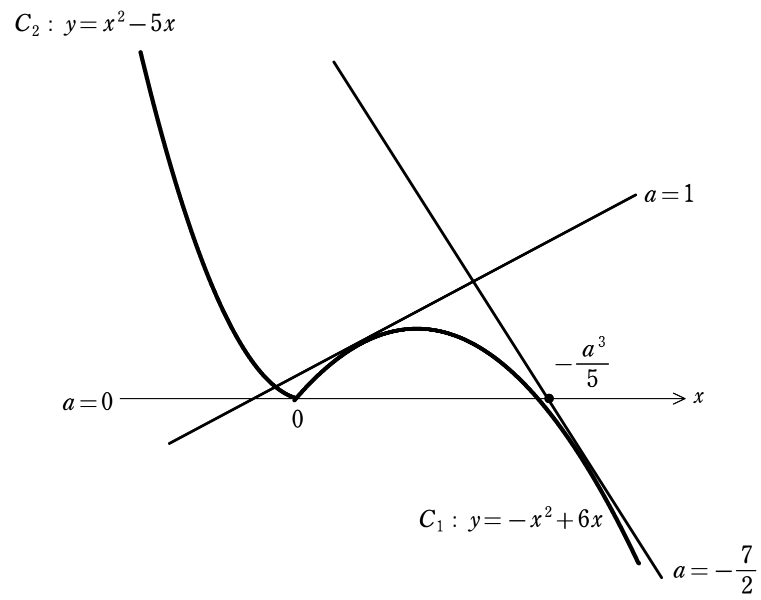
直線 L の y 切片は、$a^4\geqq 0$ で、$a=0$ のとき、$y'=2x-5$ より、$y=0$ は接線ではないので、曲線 C_2 と直線 L が接することはない ………(※)

よって、直線 L は、a の増加に伴い傾きは単調増加し、x 切片は単調減少することに加え $\left(\because\ 直線\ L:y=5a\left(x+\dfrac{a^3}{5}\right)\right)$

曲線 C_1 と直線 L は

$$\begin{cases} a<-\dfrac{7}{2}、1<a\ のとき、交わらない。 \\ a=-\dfrac{7}{2}、1\ のとき、接する。 \\ -\dfrac{7}{2}<a<1\ のとき、異なる\ 2\ 点で交わる。 \end{cases}$$

となることを考慮すると、$N(a)$ は以下のようになる。



a	$\cdots$	$-\frac{7}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
曲線 C_1 と直線 L との交点の個数	1	1	2	1	2	1	1
曲線 C_2 と直線 L との交点の個数	0	1	1	1	1	1	0
$N(a)$	1	2	3	2	3	2	1

参考　(※) について

曲線 C_2 と直線 L を連立して

$$x^2-5x=5ax+a^4\quad (x\leqq 0)$$

$$\therefore\quad x^2-5(a+1)x-a^4=0$$

判別式を D' とすると

$$D'=5(a+1)^2-4\cdot 1(-a^4)$$

$$\therefore\quad D'=5(a+1)^2+4a^4$$

これより、すべての a で $D'\neq 0$ より、接することはない。

3 O を原点とする座標平面における放物線 C : $y^2=4px\ (p>0)$ に対して、C の焦点を F、C 上の異なる２点を A $\left(\dfrac{\alpha^2}{4p},\ \alpha\right)$、B$\left(\dfrac{\beta^2}{4p},\ \beta\right)$（ただし、$\alpha<0<\beta$）における２接線の交点を P とする。$C$ と２直線 AF、BF で囲まれる部分の面積を S、C を２直線AP、BP で囲まれる部分の面積を T とするとき、以下の各問いに答えよ。

問１　S を α、β、p を用いて表せ。答えのみでよい。

問２　T を α、β、p を用いて表せ。答えのみでよい。

問３　$S=T$ が成り立つとき、$-\dfrac{\beta}{\alpha}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

（解説）

注意　C と２直線 AF、BF で囲まれる部分の面積 S を、図４、５の打点部分とする。
（図１～図３も考えられるが、大学の公式 HP に記載されている解答より判断した）

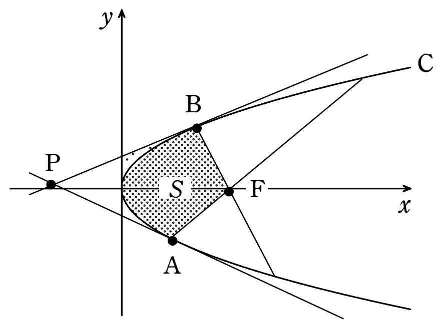


図１

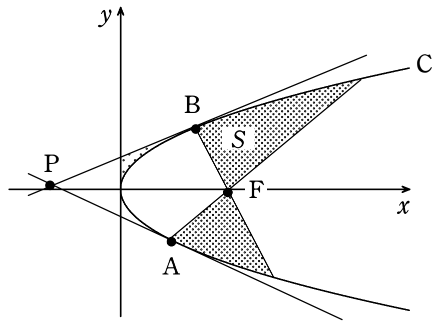


図２

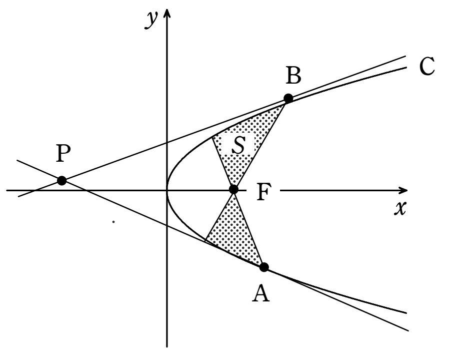


図３

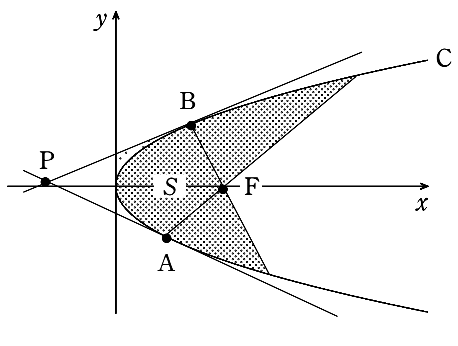


図４

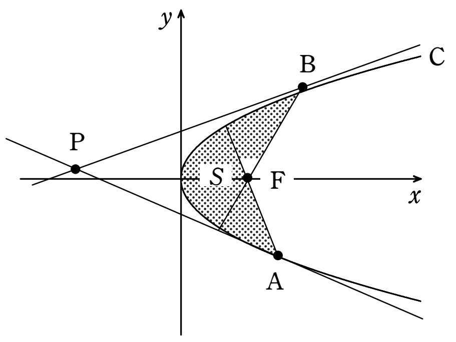


図５

問１

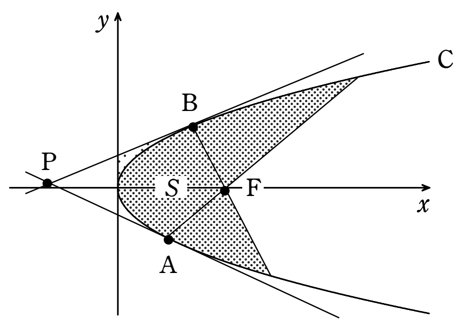


図４

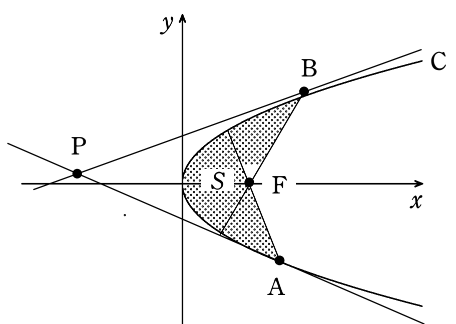


図５

直線 AB の方程式は

$$x=\frac{\dfrac{\beta^2}{4p}-\dfrac{\alpha^2}{4p}}{\beta-\alpha}(y-\alpha)+\frac{\alpha^2}{4p}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{4p}(\alpha+\beta)y-\frac{\alpha\beta}{4p}$$

これより、直線 AB と x 軸との交点座標は、$\left(-\dfrac{\alpha\beta}{4p},\ 0\right)$ となる。

（ｉ）　図４のとき

つまり、$-\dfrac{\alpha\beta}{4p}<p$ のとき

$\therefore\quad \alpha\beta>-4p^2$ のとき

直線 AF の方程式は

$$x=\frac{p-\dfrac{\alpha^2}{4p}}{0-\alpha}(y-0)+p$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{4p}-p\right)y+p$$

直線 BF も同様にして

$$x=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2}{4p}-p\right)y+p$$

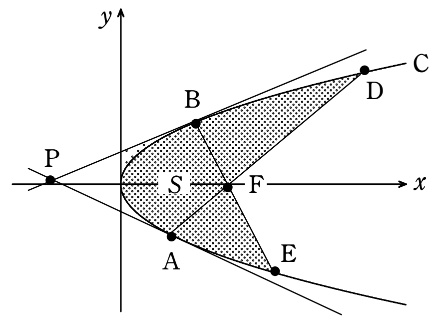
よって、放物線 C と直線 AF の交点を D とすると

$$y^2=4p\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{4p}-p\right)y+p\right\}$$

$$\therefore\quad y^2-\left(\alpha-\frac{4p^2}{\alpha}\right)y-4p^2=0$$

$$\therefore\quad (y-\alpha)\left(y+\frac{4p^2}{\alpha}\right)=0$$

$\therefore\quad y\neq\alpha$ より、$y=-\dfrac{4p^2}{\alpha}$ より



D の座標は、$\left(\dfrac{4p^3}{\alpha^2},\ -\dfrac{4p^2}{\alpha}\right)$

放物線 C と直線 BF の交点を E とすると、

E の座標も同様にして、$\left(\dfrac{4p^3}{\beta^2},\ -\dfrac{4p^2}{\beta}\right)$

よって、直線 DE の方程式は

$$x=\frac{\dfrac{4p^3}{\alpha^2}-\dfrac{4p^3}{\beta^2}}{-\dfrac{4p^2}{\alpha}-\left(-\dfrac{4p^2}{\beta}\right)}\left(y+\frac{4p^2}{\alpha}\right)+\frac{4p^3}{\alpha^2}$$

$$\therefore\quad x=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}p\left(y+\frac{4p^2}{\alpha}\right)+\frac{4p^3}{\alpha^2}$$

$$\therefore\quad x=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}py-\frac{4p^3}{\alpha\beta}$$

となるので、求める面積 S は

$S=$(直線 DE と放物線 C で囲まれた部分の面積)$-$(△DEF の面積)

$$=\int_{-\frac{4p^2}{\beta}}^{-\frac{4p^2}{\alpha}}\left\{\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}py-\frac{4p^3}{\alpha\beta}\right)-\frac{y^2}{4p}\right\}dy-\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{4p^2}{\alpha}\right)-\left(-\frac{4p^2}{\beta}\right)\right\}\cdot\left(-\frac{4p^3}{\alpha\beta}-p\right)$$

$$=-\frac{1}{4p}\int_{-\frac{4p^2}{\beta}}^{-\frac{4p^2}{\alpha}}\left(y+\frac{4p^2}{\alpha}\right)\left(y+\frac{4p^2}{\beta}\right)dy+2p^2\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{4p^3}{\alpha\beta}+p\right)$$

$$=\frac{1}{4p}\cdot\frac{1}{6}\left\{\left(-\frac{4p^2}{\alpha}\right)-\left(-\frac{4p^2}{\beta}\right)\right\}^3+2p^2\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{4p^3}{\alpha\beta}+p\right)$$

$$=\frac{8}{3}p^5\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\right)^3-\frac{2p^3}{(\alpha\beta)^2}\cdot(\beta-\alpha)(4p^2+\alpha\beta)$$

（ⅱ）　図５のとき

つまり、$-\dfrac{\alpha\beta}{4p}\geqq p$ のとき

$\therefore\quad \alpha\beta\leqq-4p^2$ のとき

$S=$(直線 AB と放物線 C で囲まれた部分の面積)$-$(△ABF の面積)

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(\frac{\alpha+\beta}{4p}y-\frac{\alpha\beta}{4p}\right)-\frac{y^2}{4p}\right\}dy-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left\{\left(-\frac{\alpha\beta}{4p}\right)-p\right\}$$

$$=-\frac{1}{4p}\int_{\alpha}^{\beta}(y-\alpha)(y-\beta)dy+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(p+\frac{\alpha\beta}{4p}\right)$$

$$=\frac{1}{4p}\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{8p}(\beta-\alpha)(4p^2+\alpha\beta)$$

$$=\frac{1}{24p}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{p}{2}(\beta-\alpha)$$

問２　A における接線は

$$\alpha y=2p\left(x+\frac{\alpha^2}{4p}\right)$$

$$\therefore\quad x=\frac{\alpha}{2p}y-\frac{\alpha^2}{4p}$$

B における接線も同様にして

$$x=\frac{\beta}{2p}y-\frac{\beta^2}{4p}$$

よって、P の y 座標は

$$\frac{\alpha}{2p}y-\frac{\alpha^2}{4p}=\frac{\beta}{2p}y-\frac{\beta^2}{4p}$$

$$\therefore\quad \frac{\beta-\alpha}{2p}y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{4p}$$

$$\therefore\quad y=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

よって、求める面積 T は

$$T=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\frac{y^2}{4p}-\left(\frac{\alpha}{2p}y-\frac{\alpha^2}{4p}\right)\right\}dy+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{\frac{y^2}{4p}-\left(\frac{\beta}{2p}y-\frac{\beta^2}{4p}\right)\right\}dy$$

$$=\frac{1}{4p}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(y-\alpha)^2dy+\frac{1}{4p}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(y-\beta)^2dy$$

$$=\frac{1}{4p}\left[\frac{1}{3}(y-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{4p}\left[\frac{1}{3}(y-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{12p}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3+\frac{1}{12p}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{48p}(\beta-\alpha)^3$$

問3　$\alpha\beta>-4p^2$ のときは、明らかに $S>T$

よって、$\alpha\beta\leqq-4p^2$ のときを考える。

$S=T$ のとき

$$\frac{1}{24p}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{p}{2}(\beta-\alpha)=\frac{1}{48p}(\beta-\alpha)^3$$

$$\therefore\quad 2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+24p^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\therefore\quad \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2+24p^2=0$$

$$\therefore\quad 1+4\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{24p^2}{\alpha^2}=0$$

$$\therefore\quad \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-4\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+1=-\frac{24p^2}{\alpha^2}$$

$-\dfrac{\beta}{\alpha}=t$ とおくと $(t>0)$

$$t^2-4t+1=-\frac{24p^2}{\alpha^2}$$

$-\dfrac{24p^2}{\alpha^2}<0$ より

$$t^2-4t+1<0$$

$$\therefore\quad 2-\sqrt{3}<t<2+\sqrt{3}\quad (t>0 \text{ を満たす})$$

よって、$2-\sqrt{3}<-\dfrac{\beta}{\alpha}<2+\sqrt{3}$

4 a、b を正の定数とする。xy 平面上の２つの曲線 $C_1: y=e^{x^2}\ (x>0)$、$C_2: y=a\log x+b\ (x>0)$ に対して、C_1 と C_2 はただ一つの共有点 $(\alpha,\ e^{\alpha^2})\ (0<\alpha<1)$ をもつとする。

また、曲線 C_1、曲線 C_2、直線 $x=\alpha^{\frac{3}{2}}$ で囲まれた図形を y 軸の周りに１回転してできる回転体の体積を $V(\alpha)$ とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問１　a、b を α を用いて表せ。

問２　$V(\alpha)$ を α のみを用いて表せ。

問３　$0\leqq t\leqq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{t^3}{6}\leqq e^{-t}-1+t-\frac{t^2}{2}\leqq 0$$

問４　極限 $\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$ が存在し、かつその極限値が正となるような正の定数 c の値を求めよ。また、そのときの極限値を答えよ。ただし、必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ であることは証明なしに用いてよい。

解説

問１　$f(x)=e^{x^2}$、$g(x)=a\log x+b$ とおく。

$x>0$ において

$$f'(x)=2xe^{x^2}>0、f''(x)=2(2x^2+1)e^{x^2}>0 \quad より$$

$y=f(x)$ は $x>0$ で下凸で単調増加するグラフとなるので、C_1 と C_2 がただ一つの共有点をもつのは、$(\alpha、e^{\alpha^2})$ で接するときである。

よって、$x=\alpha$ で C_1 と C_2 が接する条件は

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

$g'(x)=\dfrac{a}{x}$ より

$$\begin{cases} e^{\alpha^2}=a\log\alpha+b \quad \cdots\cdots ① \\ 2\alpha e^{\alpha^2}=\dfrac{a}{\alpha} \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

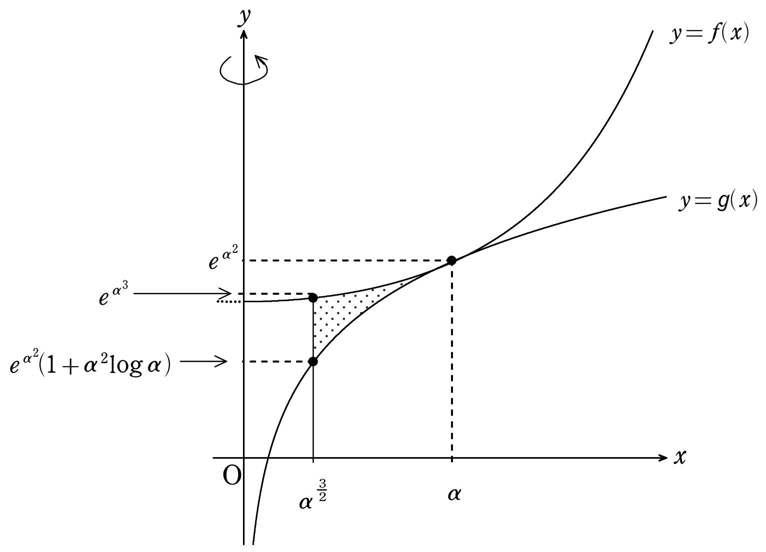
① より、$a=2\alpha^2e^{\alpha^2}$ ……③

③ を ② に代入して

$$e^{\alpha^2}=2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha+b$$

$$\therefore\quad b=e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha$$

問２　問１より、グラフを以下のようになる。



$y=f(x)$ の $\alpha^{\frac{3}{2}}\leqq x\leqq\alpha$ に対応する部分の x を x_1、$y=g(x)$ の $\alpha^{\frac{3}{2}}\leqq x\leqq\alpha$ に対応する部分の x を x_2 とすると、求める体積 $V(\alpha)$ は

$$V(\alpha)=\pi\int_{e^{\alpha^2}(1+\alpha^2\log\alpha)}^{e^{\alpha^2}}{x_2}^2dy-\pi\int_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}}{x_1}^2dy-\pi\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)^2\left\{e^{\alpha^3}-e^{\alpha^2}(1+\alpha^2\log\alpha)\right\}$$

$y=f(x)$ において、$dy=2xe^{x^2}dx$ で、$y: e^{\alpha^3}\to e^{\alpha^2}$ のとき、$x: \alpha^{\frac{3}{2}}\to\alpha$

$y=g(x)$ において、$dy=\dfrac{2\alpha^2e^{\alpha^2}}{x}dx$ で、$y: \alpha^2(1+\alpha^2\log\alpha)\to e^{\alpha^2}$ のとき、$x: \alpha^{\frac{3}{2}}\to\alpha$

よって

$$V(\alpha)=\pi\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}x^2\cdot\frac{2\alpha^2e^{\alpha^2}}{x}dx-\pi\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}x^2\cdot 2xe^{x^2}dx-\pi\alpha^3\left\{e^{\alpha^3}-e^{\alpha^2}(1+\alpha^2\log\alpha)\right\}$$

$$=2\alpha^2e^{\alpha^2}\pi\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}xdx-2\pi\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}x^3e^{x^2}dx-\pi\alpha^3\left\{e^{\alpha^3}-e^{\alpha^2}(1+\alpha^2\log\alpha)\right\}$$

ここで、$\displaystyle\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}=\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)$

$$\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}x^3e^{x^2}dx=\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}\frac{1}{2}x^2(e^{x^2})'dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2e^{x^2}\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}-\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}xe^{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^2e^{\alpha^2}-\frac{1}{2}\alpha^3e^{\alpha^3}-\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}\frac{1}{2}(e^{x^2})'dx$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^2e^{\alpha^2}-\frac{1}{2}\alpha^3e^{\alpha^3}-\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^2e^{\alpha^2}-\frac{1}{2}\alpha^3e^{\alpha^3}-\frac{1}{2}e^{\alpha^2}+\frac{1}{2}e^{\alpha^3}$$

よって

$$V(\alpha)=2\alpha^2e^{\alpha^2}\pi\cdot\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)-2\pi\left(\frac{1}{2}\alpha^2e^{\alpha^2}-\frac{1}{2}\alpha^3e^{\alpha^3}-\frac{1}{2}e^{\alpha^2}+\frac{1}{2}e^{\alpha^3}\right)$$
$$-\pi\alpha^3\left\{e^{\alpha^3}-e^{\alpha^2}(1+\alpha^2\log\alpha)\right\}$$

$$=\pi\left\{(1-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^5\log\alpha)e^{\alpha^2}-e^{\alpha^3}\right\}$$

別解　バームクーヘン分割より

$$V(\alpha)=2\pi\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}x\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=2\pi\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}(xe^{x^2}-ax\log x-bx)dx$$

$$=2\pi\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}\left\{\frac{1}{2}(e^{x^2})'-a\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x-bx\right\}dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}-2\pi a\left(\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}-\frac{1}{2}\int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}xdx\right)-2b\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}$$

$$=\pi(e^{\alpha^2}-e^{\alpha^3})-\pi a\left(\alpha^2\log\alpha-\alpha^3\log\alpha^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha}\right)-b\pi(\alpha^2-\alpha^3)$$

$$=\pi(e^{\alpha^2}-e^{\alpha^3})-\pi a\left(\alpha^2\log\alpha-\frac{3}{2}\alpha^3\log\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha^3\right)-b\pi(\alpha^2-\alpha^3)$$

$a=2\alpha^2e^{\alpha^2}$、$b=e^{\alpha^2}-2\alpha^2e^{\alpha^2}\log\alpha$ を代入して整理すると

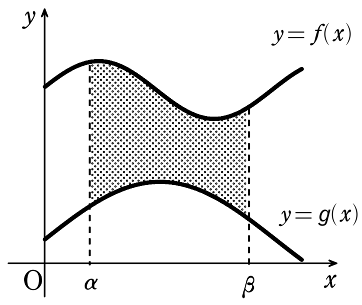
$$V(\alpha)=\pi\left\{(1-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^5\log\alpha)e^{\alpha^2}-e^{\alpha^3}\right\}$$

参考　バームクーヘン分割

右の図のような打点部分を y 軸まわりに一回転させてできる立体の体積は

$$V=\int_{x=\alpha}^{x=\beta}2\pi x\{f(x)-g(x)\}dx$$

となる。



注意　記述式で使うのは控えたほうが良い。

問３　$-\dfrac{t^3}{6}\leqq e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}\leqq 0$ ……④

$F(t)=-e^{-t}+1-t+\dfrac{t^2}{2}$ とおくと

$$F'(t)=e^{-t}-1+t$$
$$F''(t)=-e^{-t}+1\geqq 0$$

よって、$0\leqq t\leqq 1$ において、$F'(t)$ は単調増加であり、$F'(0)=0$ より、$F'(t)\geqq 0$

よって、$0\leqq t\leqq 1$ において、$F(t)$ は単調増加であり、$F(0)=0$ より、$F(t)\geqq 0$

これより、④ の右側は示された。

次に、$G(t)=e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}$ とおくと

$$G'(t)=-e^{-t}+1-t+\frac{1}{2}t^2=F(t)\geqq 0$$

よって、$0\leqq t\leqq 1$ において、$G(t)$ は単調増加であり、$G(0)=0$ より、$G(t)\geqq 0$

これより、④ の左側は示された。

問４　問２より

$$V(\alpha)=\pi\left\{(1-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^5\log\alpha)-e^{\alpha^3-\alpha^2}\right\}e^{\alpha^2}$$

$t=\alpha^2-\alpha^3$ $(0<\alpha<1$ より、$0<\alpha^2-\alpha^3<1)$ とおくと

④ より、$-\dfrac{t^3}{6}\leqq e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}\leqq 0$

$$\therefore\quad 1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\leqq e^{-t}\leqq 1-t+\frac{t^2}{2}$$

$$\therefore\quad 1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2-\frac{1}{6}(\alpha^2-\alpha^3)^3\leqq e^{-(\alpha^2-\alpha^3)}\leqq 1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2$$

$$\therefore\quad 1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2-\frac{1}{6}(\alpha^2-\alpha^3)^3\leqq e^{-(\alpha^2-\alpha^3)}\leqq 1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2$$

$$\therefore\quad -1+\alpha^2-\alpha^3-\frac{1}{2}(\alpha^4-2\alpha^5+\alpha^6)\leqq -e^{-(\alpha^3-\alpha^3)}\leqq -1+\alpha^2-\alpha^3-\frac{1}{2}(\alpha^4-2\alpha^5+\alpha^6)$$
$$+\frac{1}{6}(\alpha^6-3\alpha^7+3\alpha^8-\alpha^9)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6\leqq 1-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^5\log\alpha-e^{-(\alpha^2-\alpha^3)}$$
$$\leqq\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6+\frac{1}{6}(\alpha^6-3\alpha^7+3\alpha^8-\alpha^9)$$

$$\therefore\quad \pi\left(\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6\right)e^{\alpha^2}\leqq V(\alpha)$$
$$\leqq\pi\left\{\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6+\frac{1}{6}(\alpha^6-3\alpha^7+3\alpha^8-\alpha^9)\right\}$$

$$\therefore\quad \pi\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6}{\alpha^c}\right)e^{\alpha^2}\leqq\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$$

$$\leqq\pi\left\{\frac{\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^5\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^6+\frac{1}{6}(\alpha^6-3\alpha^7+3\alpha^8-\alpha^9)}{\alpha^c}\right\}$$

$$\therefore\quad \pi\left(\frac{\frac{1}{2}+\alpha\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2}{\alpha^{c-4}}\right)e^{\alpha^2}\leqq\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$$

$$\leqq\pi\left\{\frac{\frac{1}{2}+\alpha\log\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{6}(\alpha^2-3\alpha^3+3\alpha^4-\alpha^5)}{\alpha^{c-4}}\right\}\ \cdots\cdots⑤$$

$\lim\limits_{\alpha\to+0}\alpha\log\alpha=0$ より

$c>4$ のとき、(⑤ の左辺) $\to\infty$ より、$\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{V(\alpha)}{\alpha^c}=\infty$

$c=4$ のとき、(⑤ の左辺) $\to\dfrac{\pi}{2}$、(⑤ の右辺) $\to\dfrac{\pi}{2}$ より

はさみうちの原理から、$\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{V(\alpha)}{\alpha^c}=\dfrac{\pi}{2}$

$0<c<4$ のとき、(⑤ の左辺) $\to 0$、(⑤ の右辺) $\to 0$ より

はさみうちの原理から、$\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{V(\alpha)}{\alpha^c}=0$

よって、$\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{V(\alpha)}{\alpha^c}$ が存在し、その極限値が正となるのは、$c=4$ で、そのときの

極限値は $\dfrac{\pi}{2}$ である。