1 i を虚数単位として、複素数 $z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$ を考える。次の $\boxed{}$ を適切な数値で埋めよ。ただし、答えは結果のみ解答欄に記入せよ。

$w=z+z^3$ とし、w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。このとき $w+\overline{w}=\boxed{(1)}$ である。$w\cdot\overline{w}$ の実部は $\boxed{(2)}$ であり、虚部は $\boxed{(3)}$ である。点 z^2 と z^3 を焦点とし、焦点からの距離の差の大きさが z^2 の虚部で定まる双曲線を考える。この双曲線の漸近線の絶対値は $\boxed{(4)}$ である。

（解説）

(1) $z^5=\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$

$\therefore\ z^5=1$ ………①

$\therefore\ (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より、$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ ………②

また、$|z|=1$ より

$z\cdot\overline{z}=1$ ………③

$\therefore\ \overline{z}=\frac{1}{z}$ ………④

よって

$$\begin{aligned}w+\overline{w}&=z+z^3+\overline{z}+\overline{z^3}\\&=z+z^3+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}\quad(\because ④)\\&=z+z^3+\frac{z^5}{z}+\frac{z^5}{z^3}\quad(\because ①)\\&=z+z^3+z^4+z^2\\&=1+z+z^2+z^3+z^4-1\\&=-1\quad(\because ②)\end{aligned}$$

(2)、(3)

$$\begin{aligned}w\cdot\overline{w}&=(z+z^3)(\overline{z}+\overline{z^3})\\&=z\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{z^3}+z^3\cdot\overline{z}+z^3\cdot\overline{z^3}\\&=z\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{z}(\overline{z^2}+z^2)+(z\cdot\overline{z})^3\\&=2+z^2+\overline{z^2}\quad(\because ③)\\&=2+\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^2+\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^{-2}\\&=2+\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)+\left(\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi\right)\\&=2+2\cos\frac{4}{5}\pi\\&=2\left(1+\cos\frac{2}{5}\pi\right)\\&=4\cos^2\frac{2}{5}\pi\end{aligned}$$

ここで、② より、$z\neq 0$ から

$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$

$\therefore\ \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$

$\therefore\ \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$

$\therefore\ z+\frac{1}{z}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ 2\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \cos\frac{2}{5}\pi=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\cos\frac{2}{5}\pi>0$ より、$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

以上より

$w\cdot\overline{w}=4\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

よって、$w\cdot\overline{w}$ の実部は、$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$、虚部は 0

別解　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の値の求め方 Ⅰ

図のような頂角が $\frac{\pi}{5}$ で等辺の長さが 1 の二等辺三角形 ABC を設定し

∠B の二等分線と線分 AC との交点を D とする。

BC$=x$ とすると

△ABC ∽ △BCD より

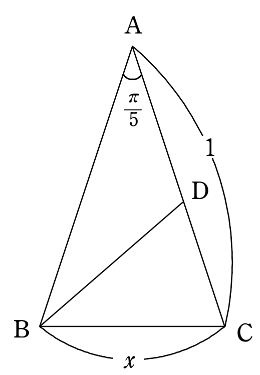
$x:1=1-x:x$

$\therefore\ x^2=1-x$

$\therefore\ x^2+x-1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

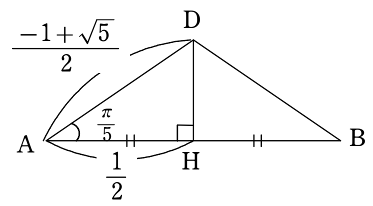
$x>0$ より、$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$



ここで、△ABD において

D から AB に下した垂線の足を H とすると

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{5}&=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AD}}\\&=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}-1}\\&=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\end{aligned}$$



よって、

$$\begin{aligned}\cos\frac{2}{5}\pi&=2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2-1\\&=2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1\\&=2\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1\\&=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\end{aligned}$$

別解　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の値の求め方 Ⅱ

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ とすると

$5\theta=2\pi$

$\therefore\ 3\theta=2\pi-2\theta$

$\therefore\ \cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)$

$\therefore\ \cos 3\theta=\cos 2\theta$

$\therefore\ 4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos^2\theta-1$

$\therefore\ 4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

$\therefore\ (\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$

$\therefore\ \cos\theta=1$、$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(4) $z^2=\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi$、$z^3=\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi$ より、z^2 と z^3 は実軸対称な点である。これらを実軸の正方向に $\left|\cos\frac{4}{5}\pi\right|$ 平行移動した点を焦点とする双曲線を

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0$、$b>0)$ とすると

焦点より、$\sqrt{a^2+b^2}=\sin\frac{4}{5}\pi$

$\therefore\ a^2+b^2=\sin^2\frac{4}{5}\pi$ ……⑤

距離の差より、$2b=\sin\frac{4}{5}\pi$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$

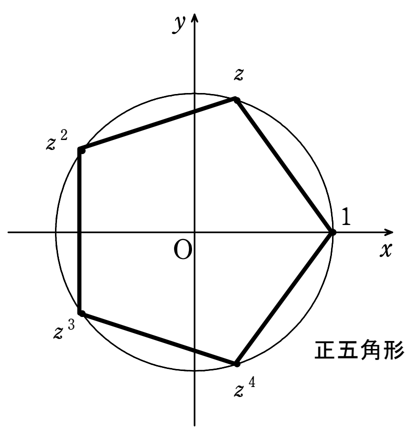
⑤ より、$a^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{4}{5}\pi=\sin^2\frac{4}{5}\pi$

$\therefore\ a^2=\frac{3}{4}\sin^2\frac{4}{5}\pi$

$a>0$ より、$a=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$

双曲線の漸近線の傾きより

$\left|\pm\frac{b}{a}\right|=\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$



2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 実数 a, b, c が

$$a+b+c=8,\ a^2+b^2+c^2=32$$

を満たすとき， c のとり得る値の範囲を不等式を用いて表せ。

(2) 次の不等式を満たす実数 x の範囲を求めよ。

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \leqq 21\left(\frac{1}{2}\right)^x - 20$$

(3) 同一平面上にあるベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ は $|\vec{a}+3\vec{b}|=5$、$|3\vec{a}-\vec{b}|=5$ をみたすように動く。このとき $|\vec{a}+\vec{b}|$ の値がとりうる範囲を不等式を用いて表せ。

(4) a、b は 1 より大きく相違なる実数とする。次の問いに答えよ。

(4−1) $x=\log_a\sqrt{ab}$ 、$y=\log_{\sqrt{ab}} b$ とする。x、y の大小関係を不等式を用いて表せ。

(4−2) $w=\log_{\frac{a+b}{2}} b$ とする。y、w の大小関係を不等式を用いて表せ。

(4−3) $z=\log_a \dfrac{a+b}{2}$ とする。x、y、w、z の大小関係を不等式を用いて表せ。

解説

(1) $a+b+c=8$ ……①,　$a^2+b^2+c^2=32$ ……②

① から　$a=8-b-c$

これを ② に代入すると

$$(8-b-c)^2+b^2+c^2=32$$

b について整理すると

$$b^2+(c-8)b+(c-4)^2=0 \quad ……③$$

③ を満たす実数 b が存在するための条件は 判別式 $D \geqq 0$

$$D=(c-8)^2-4(c-4)^2 \geqq 0$$

$$\therefore\ c(3c-16) \leqq 0$$

$$\therefore\ 0 \leqq c \leqq \frac{16}{3}$$

別解　ab 平面上で直線 $a+b+c-8=0$ と円 $a^2+b^2=32-c^2$ が共有点をもつための条件は

$$\frac{|c-8|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leqq \sqrt{32-c^2}$$

$$\therefore\ (c-8)^2 \leqq 2(32-c^2)$$

$$\therefore\ 0 \leqq c \leqq \frac{16}{3}$$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t\ (t>0)$ とおくと

与式より

$$t^3 \leqq 21t-20$$

$$\therefore\ t^3-21t+20 \leqq 0$$

$$\therefore\ (t-1)(t^2+t-20) \leqq 0$$

$$\therefore\ (t-1)(t+5)(t-4) \leqq 0$$

$t>0$ より、$t+5>0$

よって、$(t-1)(t-4) \leqq 0$

$$\therefore\ 1 \leqq t \leqq 4$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^0 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$0<$ 底 <1 より

$$-2 \leqq x \leqq 0$$

(3) $\vec{a}+3\vec{b}=\vec{p}$ ……①、$3\vec{a}-\vec{b}=\vec{q}$ ……② とおくと ($|\vec{p}|=|\vec{q}|=5$)

①+3×② より、$10\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$

よって、$\vec{a}=\dfrac{\vec{p}+2\vec{q}}{10}$

3×①−② より、$10\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$

よって、$\vec{b}=\dfrac{3\vec{p}-\vec{q}}{10}$

これより、$\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{(\vec{p}+3\vec{q})+(3\vec{p}-\vec{q})}{10}=\dfrac{2\vec{p}+\vec{q}}{5}$

よって、$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left|\dfrac{2\vec{p}+\vec{q}}{5}\right|^2$

$$=\frac{1}{25}(4|\vec{p}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)$$

$$=\frac{1}{25}(4\cdot 25+4\vec{p}\cdot\vec{q}+25)$$

$$=5+\frac{4}{25}\vec{p}\cdot\vec{q}$$

ここで、$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=25\cos\theta$$

よって、$|\vec{a}+\vec{b}|^2=5+\dfrac{4}{25}\cdot 25\cos\theta$

$$=5+4\cos\theta$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より、$1 \leqq |\vec{a}+\vec{b}|^2 \leqq 9$

よって、$1 \leqq |\vec{a}+\vec{b}| \leqq 3$

(4)

(4−1) $x-y=\log_a\sqrt{ab}-\log_{\sqrt{ab}} b$

$$=\log_a\sqrt{ab}-\frac{\log_a b}{\log_a\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\log_a\sqrt{ab})^2-\log_a b}{\log_a\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\log_a ab\right)^2-\log_a b}{\log_a\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(1+\log_a b)^2-4\log_a b}{4\log_a\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(1-\log_a b)^2}{4\log_a\sqrt{ab}}$$

$a>1$、$b>1$ 、$a \fallingdotseq b$ より、$\log_a b>0$、$\log_a b \fallingdotseq 1$

よって、$\dfrac{(1-\log_a b)^2}{4\log_a\sqrt{ab}}>0$

$$\therefore\ x>y$$

(4−2) $a>1$、$b>1$ より、相加平均相乗平均の大小関係から

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}>1$$

等号は $a=b$ のとき成立するが、$a \fallingdotseq b$ より

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>1$$

よって、$\log_{\frac{a+b}{2}} b<\log_{\sqrt{ab}} b$

$$\therefore\ w<y$$

別解　$y=\dfrac{1}{\log_b\sqrt{ab}}$、$w=\dfrac{1}{\log_b\dfrac{a+b}{2}}$

$a>1$、$b>1$ より、相加平均相乗平均の大小関係から

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}>1$$

等号は $a=b$ のとき成立するが、$a \fallingdotseq b$ より

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>1$$

よって、$\log_b\dfrac{a+b}{2}>\log_b\sqrt{ab}>0$

$$\therefore\ \frac{1}{\log_b\frac{a+b}{2}}<\frac{1}{\log_b\sqrt{ab}}$$

$$\therefore\ w<y$$

(4−3) (4−1)、(4−2) より、$w<y<x$

ここで、$x=\log_a\sqrt{ab}$ と $z=\log_a\dfrac{a+b}{2}$ について

(4−2) と同様に考えて、$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

よって、$\log_a\dfrac{a+b}{2}>\log_a\sqrt{ab}$

$$\therefore\ z>x$$

以上より、$w<y<x<z$

参考　答えだけを出すなら、$(a、b)=(2、8)$ などを代入してもよい。

このとき、$x=\log_2 4=2$、$y=\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\dfrac{3}{2}$

$$w=\log_5 8=\frac{3}{\log_2 5}、z=\log_2 5$$

よって、$\dfrac{3}{\log_2 5}<\dfrac{3}{\log_2 4}=\dfrac{3}{2}<2=\log_2 4<\log_2 5$

$$\therefore\ w<y<x<z$$

3 xy 平面上で、直線 $y=\frac{3}{4}x$ を ①、第 1 象限上かつ直線 ① 上に存在し、原点 O (0、0) から距離 5 の点 A とする。また、軸が y 軸に平行で、A を通り、原点 O で ① と交わる放物線を ② とする。ただし、放物線 ② の原点 O における接線は直線 ① と直交する。さらに、放物線 ② 上で OA 間に存在する点を P とし、その x 座標を p とする。点 P を通り直線 ① と直交する直線と直線 ① との交点を B として、線分 PB の長さを h とし、線分 OB の長さを t とする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　点 A の座標を求めよ。

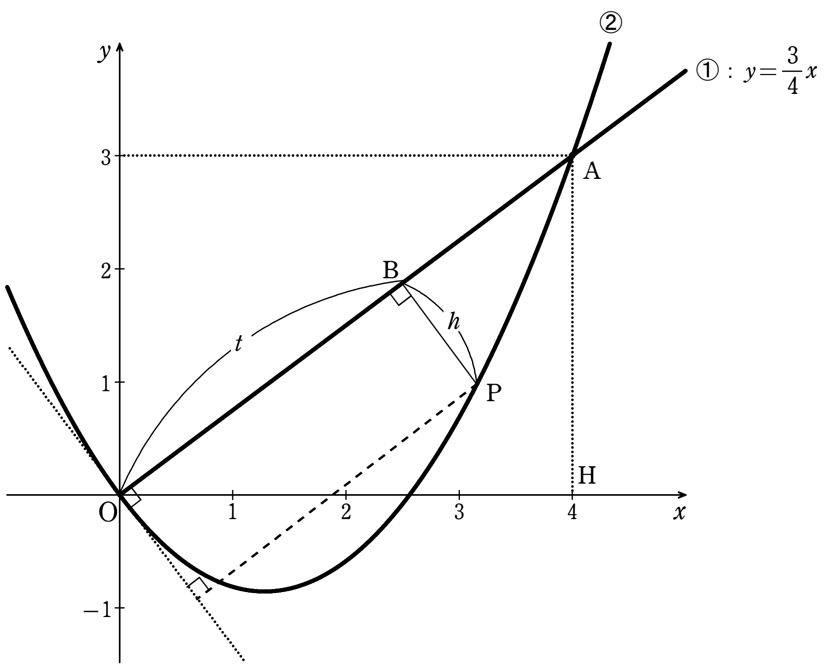
(2)　放物線 ② の方程式を x、y を用いて表せ。

(3)　h を p を用いて表せ。

(4)　t を p を用いて表せ。

(5)　直線 ① と放物線 ② で囲まれる範囲について、直線 ① を軸として回転したときにできる立体の体積を V とする。体積 V を求めよ。

解説



(1)　A $\left(t、\frac{3}{4}t\right)$ とおくと

$$5=\sqrt{t^2+\left(\frac{3}{4}t\right)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{5}{4}t=5$$

$$\therefore\quad t=4$$

よって、A (4、3)

別解　A から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると、△OAH は辺の長さが 3、4、5 の直角三角形より、A (4、3)

(2)　放物線 ② は原点を通るので、$y=f(x)=ax^2+bx\ (a\neq 0)$ とおける。

原点における接線が直線 ① と直交するので

$$f'(x)=2ax^2+b \text{ より}$$

$$f'(0)=b=-\frac{4}{3}$$

また、② は A を通るので

$$3=16a+4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore\quad a=\frac{25}{48}$$

よって、$y=\frac{25}{48}x^2-\frac{4}{3}x$

(3)　h は点P $\left(p、\frac{25}{48}p^2-\frac{4}{3}p\right)$ $(0<p<4)$ と直線 ① との距離より

$$h=\frac{\left|3p-4\left(\frac{25}{48}p^2-\frac{4}{3}p\right)\right|}{\sqrt{3^3+(-4)^2}}$$

$$=\frac{\left|-\frac{25}{12}p^2+\frac{25}{3}p\right|}{5}$$

$$=\frac{5}{12}|-p^2+4p|$$

$$=\frac{5}{12}(-p^2+4p)\ (\because 0<p<4)$$

(4)　① に直交し原点を通る直線を ③ とすると、③ は、$y=-\frac{4}{3}x$ となる。

③ と点 P との距離が t より

$$t=\frac{\left|4p+3\left(\frac{25}{48}p^2-\frac{4}{3}p\right)\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$=\frac{1}{5}\left|\frac{25}{16}p^2\right|$$

$$=\frac{5}{16}p^2$$

別解　△OPB において三平方の定理より

$$OP^2=OB^2+BP^2$$

$$p^2+\left(\frac{25}{48}p^2-\frac{4}{3}p\right)^2=\left(\frac{5}{12}\right)^2(-p^2+4p)^2+t^2$$

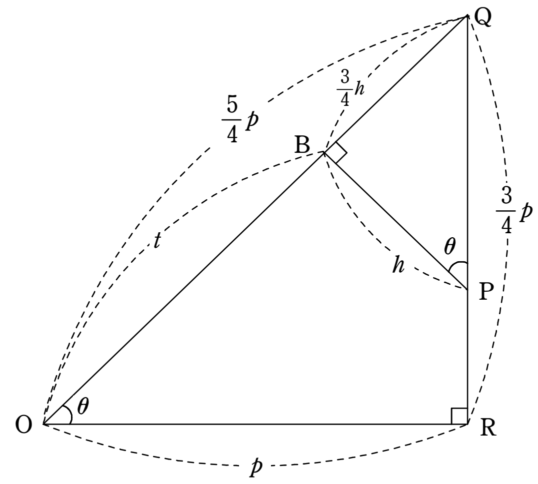
$$\therefore\quad p^2+\frac{25^2}{4^2\cdot 12^2}p^4-\frac{25}{18}p^3+\frac{16}{9}p^2=\frac{25}{12^2}p^4-\frac{25}{18}p^3+\frac{25}{9}p^2+t^2$$

$$\therefore\quad t^2=\frac{25}{256}p^4$$

$t>0$、$p>0$ より

$$t=\frac{5}{16}p^2$$

別解　点P を通り y 軸に平行な直線と ① との交点を Q、x 軸との交点を R とすると



△AQR ∽ △PQB より、$OB=\frac{3}{4}h$

よって、OQ＝OB＋BQ

$$\therefore\quad \frac{5}{4}p=t+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}(-p^2+4p)$$

$$\therefore\quad t=\frac{5}{16}p^2$$

(4)　求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^5 h^2dt \quad \text{より}$$

$t=\frac{5}{16}p^2$ とおくと、$dt=\frac{5}{8}pdp$

t	$0\to 5$
p	$0\to 4$

よって、$V=\pi\int_0^4\frac{25}{12^2}(-p^2+4p)^2\cdot\frac{5}{8}pdp$

$$=\frac{5^3}{12^2\cdot 8}\pi\int_0^4 p^3(4-p)^2dp \quad \cdots\cdots(※)$$

$$=\frac{5^3}{12^2\cdot 8}\pi\int_0^4(p^5-8p^4+16p^3)dp$$

$$=\frac{5^3}{12^2\cdot 8}\pi\left[\frac{1}{5}p^6-\frac{8}{5}p^5+4p^4\right]_0^4$$

$$=\frac{200}{27}\pi$$

参考　(※) において、以下の公式を利用してもよい。

＜第 1 種オイラー積分の公式＞

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

(※) より

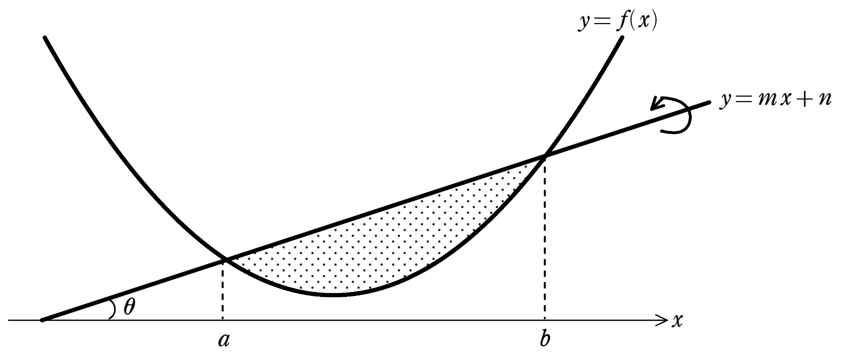
$$V=\frac{5^3}{12^2\cdot 8}\pi\cdot\frac{3!2!}{(3+2+1)!}\cdot(4-0)^{3+2+1}$$

$$=\frac{5^3}{12^2\cdot 8}\pi\cdot\frac{12}{6!}\cdot 4^6$$

$$=\frac{200}{27}\pi$$

参考　「答えのみ」なので、以下の公式を用いてもよい。

＜斜軸回転体の体積の公式＞



図の打点部分を $y=mx+n$ の周りに回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V=\cos\theta\cdot\int_a^b\pi\{f(x)-(mx+n)\}^2dx$$

以上を用いると

$$V=\frac{4}{5}\pi\int_0^4\left\{\left(\frac{25}{48}x^2-\frac{4}{3}x\right)-\frac{3}{4}x\right\}^2dx$$
$$=\frac{4}{5}\pi\int_0^4\left(\frac{25}{48}x^2-\frac{25}{12}x\right)^2dx$$
$$=\frac{4}{5}\pi\cdot\left(\frac{25}{48}\right)^2\int_0^4 x^2(x-4)^2dx$$
$$=\frac{4}{5}\pi\cdot\left(\frac{25}{48}\right)^2\cdot\frac{2!2!}{(2+2+1)!}\cdot(4-0)^{2+2;1}$$
$$=\frac{200}{27}\pi$$

4 1 から n までの自然数を重複なく 1 枚に 1 つずつ記した n 枚のカードを用意した。次の各問いに答えよ。ただし、結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　n 枚のカードから同時に 2 枚のカードを選ぶ。カードに記された数字の和が $n+1$ より小さい場合が何通りあるか調べたい。

(1−1)　$n=8$ のとき何通りあるか。

(1−2)　$n=9$ のとき何通りあるか。

(1−3)　n が偶数 のとき何通りあるか。

(1−4)　n が奇数 のとき何通りあるか。

(2)　p は自然数とする $(p<n)$。n 枚のカードから p と $p+1$ が記された計 2 枚のカードを抜き出した。残ったカードに記された自然数を全て合計すると 2023 となった。このとき自然数 p と n を求めよ。

解説

(1)　選んだ 2 枚のカードの数字を $(a、b)$ $(a<b)$ と表す。

(1−1)　$n=8$ のとき、$a+b<8+1<9$ より

$(a、b)=(1、2)、(1、3)、(1、4)、(1、5)、(1、6)、(1、7)$
$(2、3)、(2、4)、(2、5)、(2、6)$
$(3、4)、(3、5)$

よって、$2+4+6=12$ 通り

(1−2)　$n=9$ のとき、$a+b<9+1<10$ より

$(a、b)=(1、2)、(1、3)、(1、4)、(1、5)、(1、6)、(1、7)、(1、8)$
$(2、3)、(2、4)、(2、5)、(2、6)、(2、7)$
$(3、4)、(3、5)、(3、6)$
$(4、5)$

よって、$1+3+5+7=16$ 通り

(1−3)　n が偶数のとき、$a+b<n+1$ となるのは

$(a、b)=(1、2)、(1、3)、(1、4)、\cdots\cdots、(1、n-1)$
$(2、3)、(2、4)、(2、5)、\cdots\cdots(2、n-2)$
$(3、4)、(3、5)、\cdots\cdots、(3、n-3)$
$(4、5)、\cdots\cdots、(4、n-4)$
$\vdots$
$\left(\frac{n}{2}-1、\frac{n}{2}\right)、\left(\frac{n}{2}-1、\frac{n}{2}+1\right)$

よって、$2+4+6+\cdots\cdots+(n-2)=\dfrac{\frac{n-2}{2}}{2}\{2+(n-2)\}$

$=\dfrac{n(n-2)}{4}$　通り

(1−4)　n が奇数のとき、$a+b<n+1$ となるのは

$(a、b)=(1、2)、(1、3)、(1、4)、\cdots\cdots、(1、n-1)$
$(2、3)、(2、4)、(2、5)、\cdots\cdots(2、n-2)$
$(3、4)、(3、5)、\cdots\cdots、(3、n-3)$
$(4、5)、\cdots\cdots、(4、n-4)$
$\vdots$
$\left(\frac{n-1}{2}、\frac{n-1}{2}\right)$

よって、$1+3+5+\cdots\cdots+(n-2)=\dfrac{\frac{n-1}{2}}{2}\{1+(n-2)\}$

$=\dfrac{(n-1)^2}{4}$　通り

参考　(3)、(4) を最初に解いて、$n=8$、9 を代入してもよい。
((1) から 解いた人は、(3)、(4) を解いた後に、$n=8$、9 を代入して確認をしたい）

(2)　残ったカードの数字の合計が 2023 より

$$\sum_{k=1}^{n}k-\{p+(p+1)\}=2023$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}n(n+1)-2p-1=2023$$
$$\therefore\ p=\frac{1}{4}n(n+1)-1012\ \cdots\cdots\ ①$$

$0<p<n$ より

$$0<\frac{1}{4}n(n+1)-1012<n$$
$$\therefore\ 0<n^2+n-4048<4n$$
$$\therefore\ \begin{cases}n(n+1)>4048\\ n(n-3)<4048\end{cases}$$

n は自然数より、$n=64$、65
（$\because 63\times64=4032$、$64\times65=4160$、$62\times65=4030$、$63\times66=4158$）

① より、$n=64$ のとき、$p=28$

$n=65$ のとき、$p=\dfrac{121}{2}$

p は、$0<p<n$ を満たす自然数より

$n=64$、$p=28$