◇２０２３年　埼玉医科 後期

1 次の問い(問１、２)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１　$\sin\frac{5}{12}\pi$ は、整数を係数とする t の４次方程式

$$\boxed{1}\,\boxed{2}\,t^4-\boxed{3}\,\boxed{4}\,t^2+1=0$$

を満たす。この方程式を満たす t をすべて求めると

$$t=\pm\frac{\sqrt{\boxed{5}}+\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{7}}、\ \pm\frac{\sqrt{\boxed{8}}+\sqrt{\boxed{9}}}{\boxed{10}}$$

である。ただし、$\boxed{5}>\boxed{6}$ かつ $\boxed{8}>\boxed{9}$ とする。

問２　座標平面上に４点A$(-1,\ 1)$、B$(-1,\ -1)$、C$(1,\ -1)$、D$(1,\ 1)$からなる正方形ABCDがあり、x 軸上に２点P点$(-a,\ 0)$、Q$(a,\ 0)$をとる。ただし、$a>0$ とする。このとき、$L=\mathrm{PQ}+\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{QC}+\mathrm{QD}$ が最小値をとるのは

$$a=\boxed{11}-\frac{\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{13}}$$

のときであり、最小値は

$$L=\boxed{14}\left(\boxed{15}+\sqrt{\boxed{16}}\right)$$

である。

(解説)

問１　倍角の公式より、$\cos\frac{5}{6}\pi=1-2\sin^2\frac{5}{12}\pi$

$$\therefore\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\sin^2\frac{5}{12}\pi$$

$\sin\frac{5}{12}\pi=t$ とおくと

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-2t^2$$

２乗して

$$\frac{3}{4}=1-4t^2+4t^4$$

$$\therefore\quad 16t^4-16t^2+1=0$$

$$\therefore\quad t^2=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$$

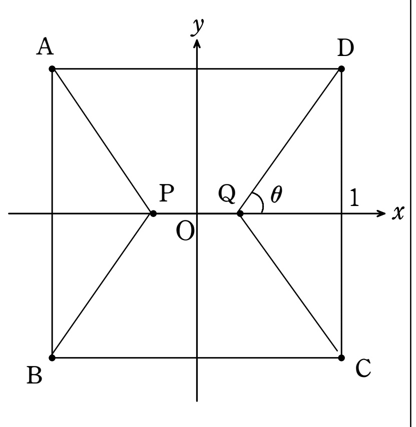
$$\therefore\quad t=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{3}\pm1)^2}{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{3}\pm1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}\quad（複号任意）$$

問２　最小値を求めるので、$0<a\leqq1$ とする。
$(1,\ 0)$、Q、Dを結んでできる角を θ とおくと
$0<a\leqq1$ より、$\frac{\pi}{4}<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ となる。

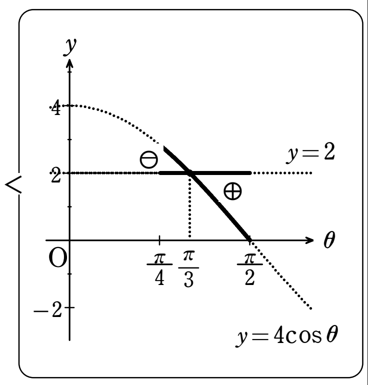


$\mathrm{QD}=\frac{1}{\sin\theta}$、$\mathrm{OQ}=1-\frac{1}{\tan\theta}$ より、
対称性を考慮して

$$L=\mathrm{PQ}+\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{QC}+\mathrm{QD}$$
$$=2\mathrm{OQ}+4\mathrm{QD}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{\tan\theta}\right)+\frac{4}{\sin\theta}$$
$$=2+\frac{4-2\cos\theta}{\sin\theta}$$

よって、$\frac{dL}{d\theta}=\frac{2\sin\theta\cdot\sin\theta-(4-2\cos\theta)\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$$=\frac{2-4\cos\theta}{\sin^2\theta}\quad より$$



増減表は、以下のようになる。

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dL}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
L		↘	最小	↗	

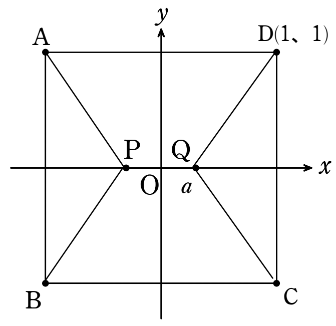
よって、$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき、つまり、$a=1-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

最小値 $L=2\left(1-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}\right)+\frac{4}{\sin\frac{\pi}{3}}$

$$=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$2(1+\sqrt{3})$$

(別解)　最小値を求めるので、$0<a\leqq1$ とする。



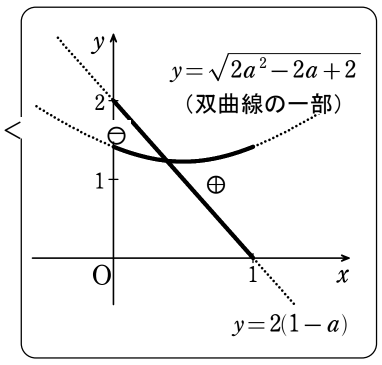
$$\mathrm{QD}=\sqrt{(1-a)^2+1}$$
$$=\sqrt{2a^2-2a+2}$$

よって、対称性を考慮して

$$L=\mathrm{PQ}+\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{QC}+\mathrm{QD}$$
$$=2\mathrm{OQ}+4\mathrm{QD}$$
$$=2a+4\sqrt{2a^2-2a+2}$$

$0<a<1$ において

$$\frac{dL}{da}=\frac{4(a-1)}{\sqrt{2a^2-2a+2}}+2$$
$$=\frac{2\{\sqrt{2a^2-2a+2}-2(1-a)\}}{\sqrt{2a^2-2a+2}}$$



$\frac{dL}{da}=0$ とすると

$$2(a-1)=\sqrt{2a^2-2a+2}$$
$$\therefore\quad 4(a-1)^2=2a^2-2a+2$$
$$\therefore\quad 3a^2-6a+2=0$$
$$\therefore\quad a=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、増減表は、以下のようになる。

a	0		$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$\frac{dL}{da}$		$-$	0	$+$	
L		↘	最小	↗	

よって、$a=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

最小値 $L=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+4\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$$=2(1+\sqrt{3})$$

◇２０２３年　埼玉医科 後期

2 次の文章を読み、下の問い(問１～３)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

定義域が実数全体である関数 $y=2x^3-3x^2+2$ の逆関数を $y=g(x)$ とする。

問１　$g(8)=\boxed{17}$ であり、$g'(8)=\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}\,\boxed{20}}$ である。

問２　曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標の値を小さい順に並べると

$\boxed{21}$、$\dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$、$\boxed{24}$ である。

問３　曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}\,\boxed{27}}$ である。

(解説)

問１　$y=2x^3-3x^2+2x$ (定義域：全実数、値域：全実数)より

x と y を入れ替えて

$$x=2y^3-3y^2+2y\quad(\text{定義域：全実数、値域：全実数})\cdots\cdots ①$$

$x=8$ のとき

$$8=2y^3-3y^2+2y$$

$$\therefore\ 2y^3-3y^2+2y-8=0$$

$$\therefore\ (y-2)(2y^2+y+4)=0$$

$2y^2+y+4=2\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{31}{8}>0$ より、$y=2$

よって、$g(8)=2$

また、① を両辺 y で微分して　………(※)

$$\frac{dx}{dy}=6y^2-6y+2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{6y^2-6y+2}$$

よって、$g'(x)=\dfrac{1}{6y^2-6y+2}$

ここで、$g(8)=2$ より、$y=g(x)$ は $(8,\ 2)$ を通るので

$$g'(8)=\frac{1}{6\cdot 2^2-6\cdot 2+2}=\frac{1}{14}$$

別解　(※)について

① を両辺 x で微分して

$$1=\frac{dy}{dx}(6y^2-6y+2)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{6y^2-6y+2}$$

問２　$y=x$ と $y=g(x)$ の交点より

① から、$x=2x^3-3x^2+2x$

$$\therefore\ 2x^3-3x^2+x=0$$

$$\therefore\ x(2x-1)(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=0、\frac{1}{2}、1$$

問３　$y=g(x)$ と $y=2x^3-3x^2+2x$ は $y=x$ に関して対称より

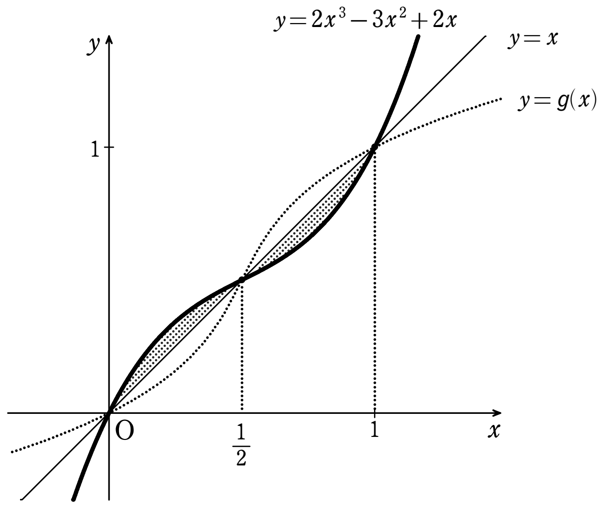
$y=g(x)$ と $y=x$ で囲まれている部分の面積と $y=2x^3-3x^2+2x$ と $y=x$ で囲まれている部分の面積は等しい。

$y=2x^3-3x^2+2x$ のグラフより

$$y'=6x^2-6x+2$$

$$=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

よって、単調増加であることと 問２から、グラフは以下のようになる。



よって、求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(2x^3-3x^2+2x)-x\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\{x-(2x^3-3x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^3-3x^2+x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1-(2x^3-3x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\frac{1}{16}$$

3 次の文章を読み、下の問い（問１～４）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

AB を底辺とする高さが５の平行四辺形 ABCD において、AB＝3、BC＝6、BC を２：１に内分する点を E、CD を２：１に内分する点を F とする。また、AC と EF の交点を G、AD の延長と EF の交点を H とする。

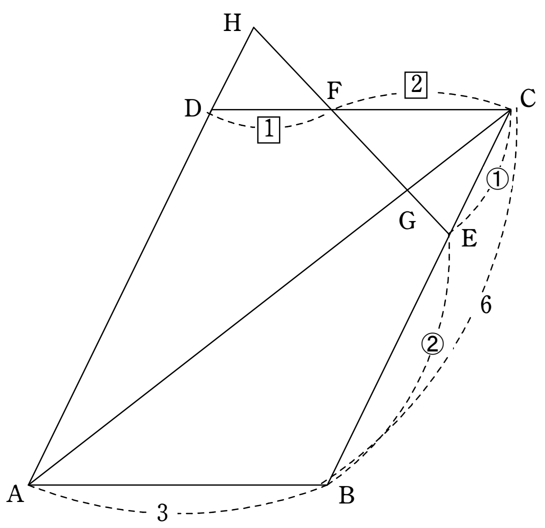
問１　$\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である。

問２　$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AG}}=\dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ である。

問３　$\dfrac{\mathrm{FH}}{\mathrm{GF}}=\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$ である。

問４　△CFG の面積は $\dfrac{\boxed{34}\,\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である。

（解説）



問１　△FCE ∽ △FHD で相似比は２：１

よって、CE ＝2より、DH ＝1

したがって、$\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{6}$

問２　△GCE ∽ △GAH で相似比は２：７

よって、$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AG}}=\dfrac{2}{7}$

問３　メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CG}}\cdot\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FH}}\cdot\frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{DA}}=1$$

$$\therefore\ \frac{9}{2}\cdot\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FH}}\cdot\frac{1}{6}=1$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FH}}=\frac{12}{9}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{GF}}=\frac{3}{4}$$

問４　$\triangle\mathrm{CFG}=\triangle\mathrm{ACD}\times\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}\times\dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{AC}}$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{10}{9}$$

別解　ベクトルを利用すると

問１　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を２通りで表す。

（ｉ）$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　（k：実数）

（ⅱ）$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\ell\overrightarrow{\mathrm{EF}}$　（ℓ：実数）

$$=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\ell\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$$

$$=(1-\ell)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\ell\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

$$=(1-\ell)\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)+\ell\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{2}{3}\ell\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\ell\right)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は１次独立 より、（ｉ）、（ⅱ）を比較して

$$\begin{cases}1-\dfrac{2}{3}\ell=0\\[2mm]\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\ell=k\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}k=\dfrac{7}{6}\\[2mm]\ell=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{7}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

AH：AD＝7：6

∴　AD：DH＝6：1

$$\therefore\ \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}}=\frac{1}{6}$$

問２　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を２通りで表す。

（ｉ）$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　（m：実数）

$$=m\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

（ⅱ）$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-n)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+n\overrightarrow{\mathrm{AH}}$　（n：実数）

$$=(1-n)\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)+\frac{7}{6}n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$=(1-n)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}n\right)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は１次独立 より、（ｉ）、（ⅱ）を比較して

$$\begin{cases}m=1-n\\[2mm]m=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}n\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}m=\dfrac{7}{9}\\[2mm]n=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

AG：AC＝7：9

∴　AG：GC＝7：2

$$\therefore\ \frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AG}}=\frac{2}{7}$$

問３　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=t\overrightarrow{\mathrm{AH}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

$$=\frac{7}{6}t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{7}{9}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(\because\ \text{問１、問２})$$

D、F、C は同一直線上より

$$\frac{7}{6}t+\frac{7}{9}(1-t)=1$$

$$\therefore\ 21t+14(1-t)=18$$

$$\therefore\ 7t=4$$

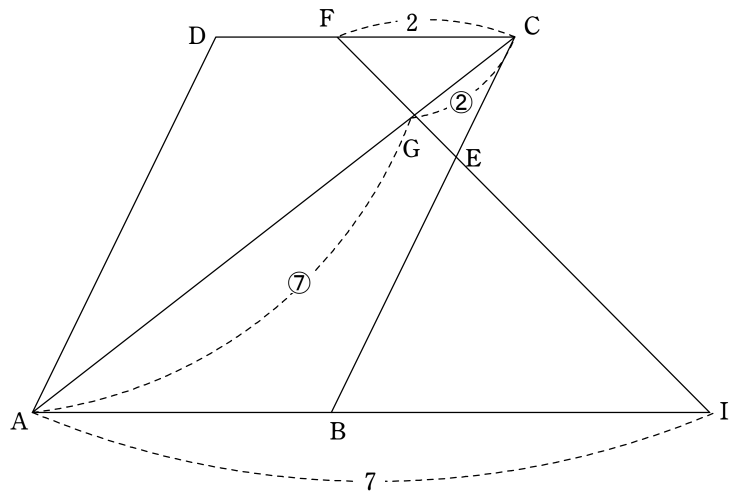
$$\therefore\ t=\frac{4}{7}$$

よって、$\mathrm{GF}:\mathrm{FH}=\dfrac{4}{7}:\dfrac{3}{7}$

∴　GF：FH＝4：3

$$\therefore\ \frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{GF}}=\frac{3}{4}$$

問４



図のように AB の延長と EF の延長の交点を I とする。

このとき、△GCF ∽ △GAI で AG：GC＝7：2 より、相似比は７：２となる。

よって、$\triangle\mathrm{CFG}=\dfrac{4}{49}\triangle\mathrm{GAI}$

$$=\frac{4}{49}\times\left\{\frac{1}{2}\times7\times\left(5\times\frac{7}{9}\right)\right\}$$

$$=\frac{10}{9}$$

別解　H から CD に下した垂線の足を K、G から CD に下した垂線の足を L とすると

$\mathrm{HK}=5\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

問３より、$\mathrm{GL}=\mathrm{HL}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{10}{9}$

よって、$\triangle\mathrm{CFG}=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{10}{9}=\dfrac{10}{9}$

4 次の文章を読み、下の問い(問1、2)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

日本には十干十二支(じっかんじゅうにし)で暦を表す方法がある。十干は甲(きのえ)、乙(きのと)、丙(ひのえ)、丁(ひのと)、戊(つちのえ)、己(つちのと)、庚(かのえ)、辛(かのと)、壬(みずのえ)、癸(みずのと)の順に全部で10種類あり、表にすると

十干

順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
種類	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸

である。また、十二支は子(ね)、丑(うし)、寅(とら)、卯(う)、辰(たつ)、巳(み)、午(うま)、未(ひつじ)、申(さる)、酉(とり)、戌(いぬ)、亥(い)　の順に12種類があり、表にすると

十二支

順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
種類	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥

である。十干と十二支を組み合わせて年を表す方法は次のようになる。西暦2022年は十干十二支で表すと「壬寅」の年で、西暦2023年は十干と十二支が1つずつ進み、「癸卯」の年となる。十干も十二支も最後まで行くと次は最初に戻る。したがって、西暦2024年は十干が最初に戻って「甲辰」の年になる。以下では、十干十二支と西暦の関係について、このルールが例外なく適用できるものとする。

問1 「甲子」の年から数えて最初の「乙卯」の年は $\boxed{37}\boxed{38}$ 年後である。

問2　大化の改新が始まったとされる年(西暦645年)に一番近い「甲子」の年は西暦 $\boxed{39}\boxed{40}\boxed{41}$ 年である。

解説

問1 「乙卯」の年は十干が2番目で、十二支が4番目より

$n=1$ を「甲子」として「乙卯」が n 年目とすると

$$\begin{cases} n=2+10k \\ n=4+12\ell \end{cases} \quad (k、\ell：0\text{ 以上の整数})$$

と表せる。

よって、$2+10k=4+12\ell$

$\therefore\ 5k-6\ell=1$ ………①

①は $k=-1$、$\ell=-1$ を満たすので

$5(-1)-6(-1)=1$ ………②

①−②より

$5(k+1)-6(\ell+1)=0$

$\therefore\ 5(k+1)=6(\ell+1)$

5と6は互いに素より

$$\begin{cases} k+1=6m \\ \ell+1=5m \end{cases} \quad (m：\text{整数})$$

$$\therefore\ \begin{cases} k=6m-1 \\ \ell=5m-1 \end{cases}$$

よって、$n=2+10k$

$=2+10(6m-1)$

$=60m-8$

これを満たす最小の自然数 n は、$m=1$ のとき、$n=52$

よって、「甲子」の年を $n=1$ としたときに、52年目なので、51年後

問2　西暦2022年に「壬寅」の年より、西暦645年に一番近い「甲子」の年を u 年とすると

$$\begin{cases} u=2022-(10s-8)=2014-10s \\ u=2022-(12t-2)=2020-12t \end{cases} \quad (s、t：\text{自然数})$$

よって、$2014-10s=2020-12t$

$\therefore\ 6t-5s=3$ ………③

③は $t=3$、$s=3$ を満たすので

$6\cdot 3-5\cdot 3=3$ ………④

③−④より

$6(t-3)-5(s-3)=0$

$\therefore\ 6(t-3)=5(s-3)$

5と6は互いに素より

$$\begin{cases} s-3=6v \\ t-3=5v \end{cases} \quad (v：\text{整数})$$

$$\therefore\ \begin{cases} s=6v+3 \\ t=5v+3 \end{cases}$$

よって、$u=2014-10(6v+3)$

$=1984-60v$

u が645に一番近くなるのは、$v=22$ のとき、$u=664$

よって、664年

別解　十干十二支は10と12の最小公倍数を考えて、60年周期である。

よって、$645+60\times 23=2025$ より

645年と2025年の十干十二支は同じで「乙巳」となる。

よって、644年は「甲辰」となる。

ここから10年経つと、十干は変わらないが、十二支は表の左に2つ進むので

654年の十干十二支は「甲寅」で、664年の十干十二支は「甲子」となる。