◇２０２３年　埼玉医科 前期

1 次の問い（問1、2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１　a、b、p を正の整数とし、$f(x)=ax^2-px+b$ とする。$y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(3,\ 11)$、$(-3,\ 35)$ を通るとき

$$p=\boxed{1}$$

である。そのときに、$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値が 11、最小値が 3 であるなら

$$a=\boxed{2}、b=\boxed{3}$$

である。

問２　平面上の△ABCにおいて辺 AB を $m:n$ に外分する点をP、辺 BC を $2:5$ に内分する点を Q、辺 AC を $3:1$ に内分する点を R とする。3 点 P、Q、R が一直線上にあるとき

$$\frac{m}{n}=\frac{\boxed{4}\boxed{5}}{\boxed{6}}$$

であり、

$$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}}=\frac{\boxed{7}\boxed{8}}{\boxed{9}}$$

である。

問１　$y=f(x)$ に $(3,\ 11)$、$(-3,\ 35)$ を代入すると

$$\begin{cases}11=9a-3p+b\ \cdots\cdots ①\\35=9a+3p+b\ \cdots\cdots ②\end{cases}$$

②－①より、$24=6p$

$\therefore\ \ p=4$、$b=23-9a$ ………③

よって、$f(x)=ax^2-4x+b$

$$=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+b-\frac{4}{a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(※)$$

a、b は 1 桁の自然数より、③から

$(a,\ b)=(2,\ 5)$

このとき、$f(x)=2x^2-4x+5$

$=2(x-1)^2+3$

確かに $-1\leqq x\leqq 2$ において、$x=-1$ で最大値 11、$x=1$ で最小値 3 をとる。

以上より、$(a,\ b)=(2,\ 5)$

別解　(※)の続き

軸が正、$y=f(x)$ が $(3,\ 11)$ を通り、最大値が 11 より、$-1\leqq x\leqq 2$ では、$x=-1$ で最大値 11 をとることが分かる。

③より、$f(x)=ax^2-4x+23-9a$

$(-1,\ 11)$ を通るので

$11=a+4+23-9a$

$\therefore\ \ a=2$

③より、$b=5$

別解　(※)の続き

(ⅰ)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

つまり、$a\geqq 4$ のとき

$x=2$ で最大値：$4a-8+b=11$　…………④

$x=\dfrac{2}{a}$ で最小値：$b-\dfrac{4}{a}=3$　…………⑤

④－⑤より、$4a-8+\dfrac{4}{a}=8$

$\therefore\ \ a^2-4a+1=0$

$\therefore\ \ a=2\pm\sqrt{3}$

$a\geqq 4$ より不適。

(ⅱ)　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{a}\leqq 2$ のとき

つまり、$1\leqq a<4$ のとき

$x=-1$ で最大値：$a+4+b=11$　…………⑥

$x=\dfrac{2}{a}$ で最小値：$b-\dfrac{4}{a}=3$　…………⑤

⑤－④より、$a+4+\dfrac{4}{a}=8$

$\therefore\ \ a^2-4a+4=0$

$\therefore\ \ (a-2)^2=0$

$\therefore\ \ a=2$

以上より、$a=2$　($1\leqq a<4$ を満たす)

③より、$b=23-9\cdot 2=5$

(ⅲ)　$2\leqq\dfrac{2}{a}$ のとき

つまり、$0<a\leqq 1$ のとき

$x=-1$ で最大値：$a+4+b=11$　…………⑥

$x=2$ で最小値：$4a-8+b=3$…………⑦

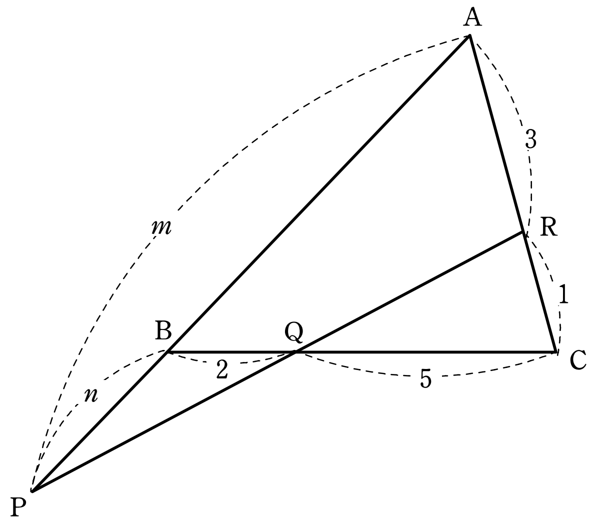
⑥－⑦より $-3a+12=8$

$\therefore\ \ a=\dfrac{4}{3}$

$0<a\leqq 1$ より、不適

(ⅰ)～(ⅲ)より、$a=2$、$b=5$

問２　$\boxed{4}$～$\boxed{6}$ より、$m>n$ となるので、以下の図のようになる。



メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$$

$$\therefore\ \ \frac{m}{n}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore\ \ \frac{m}{n}=\frac{15}{2}$$

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CR}}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{QP}}\cdot\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BA}}=1$$

$$\therefore\ \ \frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{QP}}\cdot\frac{2}{13}=1$$

$\therefore\ \ \mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=8:13$

$\therefore\ \ \mathrm{PR}:\mathrm{PQ}=21:8$

よって、$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}}=\dfrac{21}{8}$

別解　$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=1-t:t$ とおくと (t：実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

$$=t\cdot\frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots\cdots\ ①$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……… ②

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立より、①、②から

$$\begin{cases}\dfrac{tm}{m-n}=\dfrac{5}{7}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ③\\[2mm]\dfrac{3}{4}(1-t)=\dfrac{2}{7}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ④\end{cases}$$

④より、$t=\dfrac{13}{21}$

よって、$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{8}{21}:\dfrac{13}{21}=8:13$　より、$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}}=\dfrac{21}{8}$

③より、$\dfrac{13}{21}\cdot\dfrac{m}{m-n}=\dfrac{5}{7}$

$$\therefore\ \ \frac{m}{m-n}=\frac{15}{13}$$

$$\therefore\ \ \frac{m-n}{m}=\frac{13}{15}$$

$$\therefore\ \ 1-\frac{n}{m}=\frac{13}{15}$$

$$\therefore\ \ \frac{n}{m}=\frac{2}{15}$$

$$\therefore\ \ \frac{m}{n}=\frac{15}{2}$$

2 次の文章を読み、下の問い(問 1～3)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\cos x}{\sin x}+1\right)dx$ とする。

問 1　定積分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$ において、変数 x を $x+\frac{\pi}{4}=\pi-\theta$ により θ を置き換え、再び θ を x と書き換えることで

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\boxed{10}\right)dx$$

と変形できる。

$\boxed{10}$ に入る最も適切なものを、次の①～⑧のうちから 1 つ選べ。

① x^2　② $\sqrt{x}$　③ e^x　④ $\sin x$

⑤ $\cos x$　⑥ $\tan x$　⑦ $\frac{1}{x}$　⑧ $\cos 2x$

問 2　任意の実数 x に対して、$\sin x+\cos x=\sqrt{\boxed{11}}\sin\left(x+\frac{\pi}{\boxed{12}}\right)$ が成り立つ。

各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 3　$I=\frac{\pi}{\boxed{13}}\log\boxed{14}$ である。

各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　$x+\frac{\pi}{4}=\pi-\theta$ より、$dx=-d\theta$ で、$x:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$ のとき、$x:\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{4}$ より

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\log\{\sin(\pi-\theta)\}(-d\theta)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx\quad\Rightarrow④$$

問 2　合成して

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

問 3

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\cos x}{\sin x}+1\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\log\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\log(\sin x)\right\}dx\quad(\because \text{問 2})$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\log\sqrt{2}+\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}-\log(\sin x)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\sqrt{2}\,dx\quad(\because \text{問 1})$$

$$=\left[x\cdot\frac{1}{2}\log 2\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}\log 2$$

3 次の文章を読み、下の問い（問１～３）に答えよ。

図１のような座標平面上の長方形の領域 $D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq d,\ 0\leqq y\leqq n+\dfrac{1}{2}-d\right\}$ を考える。ただし、n は定数で、２以上の自然数である。また、d は $1\leqq d\leqq n$ の実数値をとる変数である。x 座標、y 座標ともに自然数である点（図１の黒丸）の中で D に含まれるものの個数は、d とともに変化するので、これを d の関数とみなして $m(d)$ と表す。

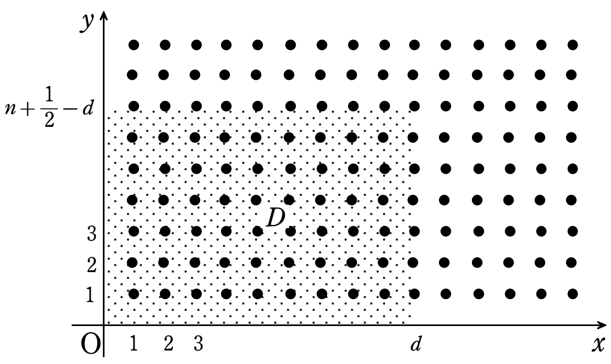


図１：黒丸は x 座標、y 座標がともに自然数である点を表す。

問１　$m(1)=\boxed{15}$、$m\left(\dfrac{3}{2}\right)=\boxed{16}$、$m(2)=\boxed{17}$ である。また

$$\lim_{d\to\frac{3}{2}+0} m(d)=\lim_{d\to2-0} m(d)=\boxed{18}$$

である。

$\boxed{15}$ ～ $\boxed{18}$ に入る最も適切なものを、次の⓪～⑧のうちからそれぞれ１つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$
④ $2n-4$　⑤ $2n-2$　⑥ $2n$　⑦ $2n+2$

問２　k を $n-1$ 以下の自然数とする。$k\leqq d\leqq k+\dfrac{1}{2}$ のとき、$m(d)=\boxed{19}$ である。

また、$k+\dfrac{1}{2}<d<k+1$ のとき、$m(d)=\boxed{20}$ である。

$\boxed{19}$、$\boxed{20}$ に入る最も適切なものを、次の⓪～⑧のうちからそれぞれ１つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

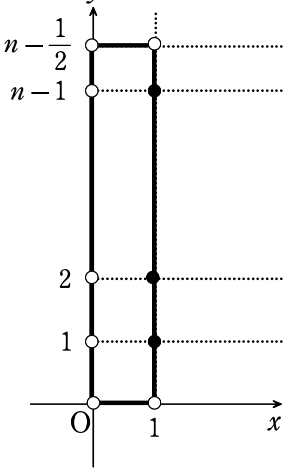
⓪ $n-k$　① $nk-1$　② $nk-2k$　③ $nk-k^2$
④ nk　⑤ $2nk-k^2$　⑥ $2nk-2k$　⑦ $nk-k^2-k$

問３　$n=17$ のとき、$m(d)$ の最大値は $\boxed{21}\boxed{22}$ である。

各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１

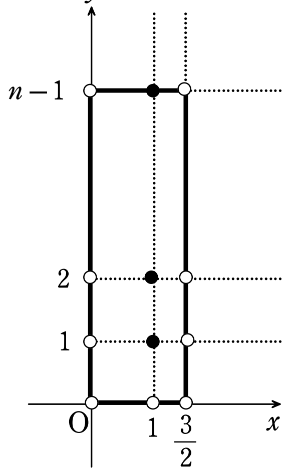
・$d=1$ のとき



図より

$m(1)=n-1$　⇒ ①

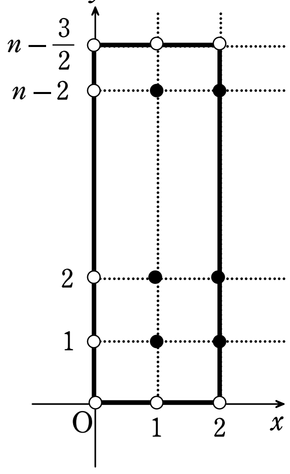
・$d=\dfrac{3}{2}$ のとき



図より

$m\left(\dfrac{3}{2}\right)=n-1$　⇒ ①

・$d=2$ のとき

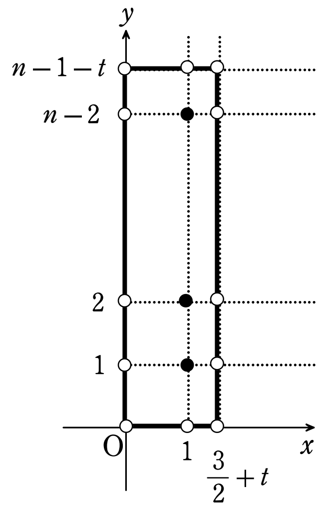


図より

$m(2)=2(n-1)$

$=2n-4$　⇒ ④

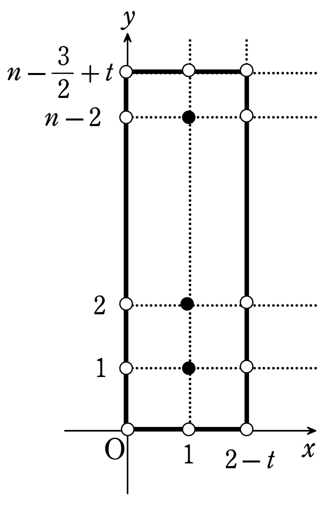
・$d=\dfrac{3}{2}+t$ のとき（t は微少量の正の数）



図より

$\displaystyle\lim_{d\to\frac{3}{2}+0} m(d)=n-2$　⇒ ⓪

・$d=2-t$ のとき



図より

$\displaystyle\lim_{d\to2-0} m(d)=n-2$　⇒ ⓪

別解　$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

条件より

$$m(d)=[d]\times\left[n+\frac{1}{2}-d\right]\ \cdots\cdots\ ①$$

となる。

よって、$m(1)=[1]\times\left[n-\dfrac{1}{2}\right]=1\times(n-1)=n-1$

$m\left(\dfrac{3}{2}\right)=[1]\times[n-1]=1\times(n-1)=n-1$

$m(2)=[2]\times\left[n-\dfrac{3}{2}\right]=2\times(n-2)=2n-4$

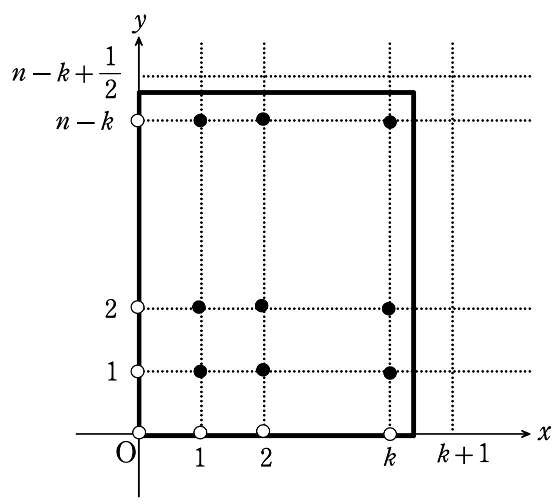
$\displaystyle\lim_{d\to\frac{3}{2}+0} m(d)=\lim_{d\to\frac{3}{2}+0}[d]\times\left[n+\frac{1}{2}-d\right]=1\times(n-2)=n-2$

$\displaystyle\lim_{d\to2-0} m(d)=\lim_{d\to2-0}[d]\times\left[n+\frac{1}{2}-d\right]=1\times(n-2)=n-2$

問２

・$k\leqq d\leqq k+\dfrac{1}{2}$ のとき

$n-k<n+\dfrac{1}{2}-d\leqq n+\dfrac{1}{2}-k$ より



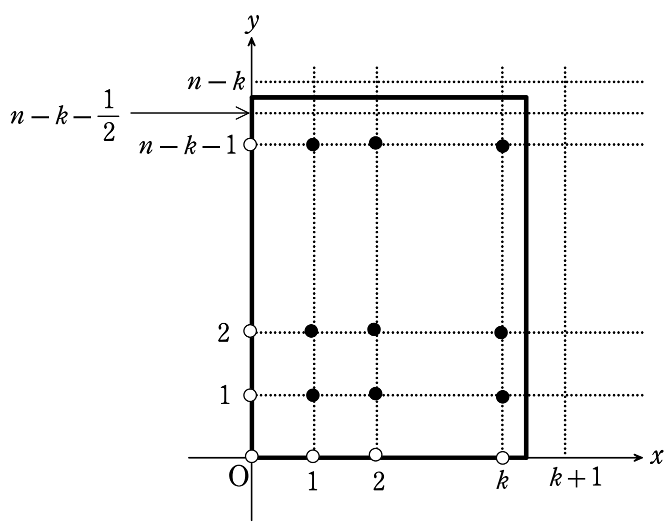
図より

$m(d)=k\times(n-k)$

$=nk-k^2$　⇒ ③

・$k+\dfrac{1}{2}<d<k+1$ のとき

$n-k-\dfrac{1}{2}<n+\dfrac{1}{2}-d<n-k$ より



図より

$m(d)=k\times(n-k-1)$

$=nk-k^2-k$　⇒ ⑦

別解

・$k \leqq d \leqq k+\dfrac{1}{2}$ のとき

$n-k < n+\dfrac{1}{2}-d \leqq n+\dfrac{1}{2}-k$　より

① から

$$m(d)=[d]\times\left[n+\frac{1}{2}-d\right]$$
$$=k\times(n-k)$$
$$=nk-k^2$$

・$k+\dfrac{1}{2} < d < k+1$ のとき

$n-k-\dfrac{1}{2} < n+\dfrac{1}{2}-d < n-k$ より

① から

$$m(d)=[d]\times\left[n+\frac{1}{2}-d\right]$$
$$=k\times(n-k-1)$$
$$=nk-k^2-k$$

問 3　$n=17$ のとき、問 2 で $1 \leqq k \leqq 16$ として

・$k \leqq d \leqq k+\dfrac{1}{2}$ のとき

$$m(d)=-k^2+17k=-\left(k-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{289}{4}\quad より$$

$k=8$、9 で最大値 72

・$k+\dfrac{1}{2} < d < k+1$ のとき

$$m(d)=17k-k^2-k=-(k-8)^2+64\quad より$$

$k=8$ で最大値 64

また、$d=17$ のとき

$$m(17)=17\times0=0$$

以上より、$m(d)$ の最大値は 72

4 次の文章を読み、下の問い(問 1～3)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

4 枚のコインを同時に投げ、表が出たコインの枚数を数えることを 4 回繰り返した。

問 1　4 回のすべてで表が出るコインの枚数が 2 以上になる確率は

$$\left(\frac{\boxed{23}\,\boxed{24}}{\boxed{25}\,\boxed{26}}\right)^4$$

である。

問 2　4 回の中で表が出るコインの枚数の最小値が 2 である確率は

$$\frac{\boxed{27}\,\boxed{28}\,\boxed{29}}{\boxed{30}\,\boxed{31}\,\boxed{32}\,\boxed{33}}$$

である。

問 3　4 回の中で表が出るコインの枚数の最小値が 2 、かつ最大値が 4 である確率は

$$\frac{\boxed{34}\,\boxed{35}\,\boxed{36}}{\boxed{37}\,\boxed{38}\,\boxed{39}\,\boxed{40}}$$

である。

問 1　4 枚のコインを同時に投げて、表が出る枚数が 2 枚以上となる確率は

$$1-{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1-\left(\frac{1}{2}\right)^4=1-\frac{4}{16}-\frac{1}{16}$$
$$=\frac{11}{16}$$

よって、求める確率は、$\left(\dfrac{11}{16}\right)^4$

別解　4 枚のコインを同時に投げて、表が出る枚数が 2 枚以上となる確率は

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6+4+1}{16}$$
$$=\frac{11}{16}$$

よって、求める確率は、$\left(\dfrac{11}{16}\right)^4$

問 2　4 枚のコインを同時に投げて、表が出る枚数が 3 枚以上となる確率は

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4+1}{16}$$
$$=\frac{5}{16}$$

よって、求める確率は

$$\begin{pmatrix}\text{4 回とも表が出る枚数が}\\ \text{2 枚以上となる確率}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{4 回とも表が出る枚数が}\\ \text{3 回以上となる確率}\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{11}{16}\right)^4-\left(\frac{5}{16}\right)^4$$
$$=\frac{11^4-5^4}{16^4}$$
$$=\frac{(11^2-5^2)(11^2+5^2)}{16^4}$$
$$=\frac{96\times146}{16^4}$$
$$=\frac{219}{1024}$$

問 3　4 枚のコインを同時に投げて、表が出る枚数が 3 枚となる確率は

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$$

4 枚のコインを同時に投げて、表が出る枚数が 2 枚または 3 枚となる確率は

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6+4}{16}$$
$$=\frac{10}{16}$$

よって、求める確率は

$$\begin{pmatrix}\text{4 回とも表が出る枚数の}\\ \text{最小値が 2 枚となる確率}\end{pmatrix}-\left\{\begin{pmatrix}\text{4 回とも表が出る枚数が}\\ \text{2 枚または 3 枚となる確率}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{4 回とも表が出る枚数}\\ \text{が 3 枚となる確率}\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{219}{1024}-\left\{\left(\frac{10}{16}\right)^4-\left(\frac{4}{16}\right)^4\right\}$$
$$=\frac{4272}{16^4}$$
$$=\frac{267}{4096}$$

別解　4 回とも表が 2 枚以上でる確率は、$\left(\dfrac{11}{16}\right)^4$

4 回とも表が 2 枚または、3 枚出る確率は、$\left(\dfrac{10}{16}\right)^4$

4 回とも表が 3 枚または、4 枚出る確率は

$$\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^4=\left(\frac{5}{16}\right)^4$$

4 回とも表が 3 枚出る確率は

$$\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^4=\left(\frac{4}{16}\right)^4$$

よって、求める確率は

$$\left(\frac{11}{16}\right)^4-\left\{\left(\frac{10}{16}\right)^4+\left(\frac{5}{16}\right)^4-\left(\frac{4}{16}\right)^4\right\}=\frac{11^4-10^4-5^4+4^4}{16^4}$$
$$=\frac{(11^2-10^2)(11^2+10^2)-(5^2-4^2)(5^2+4^2)}{16^4}$$
$$=\frac{221\cdot21-41\cdot9}{16^4}$$
$$=\frac{4272}{16^4}$$
$$=\frac{267}{4096}$$

別解　4 回とも表が 2 枚または、3 枚出る確率は、$\left(\dfrac{10}{16}\right)^4$

4 回とも表が 2 枚出る確率は

$$\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^4=\left(\frac{6}{16}\right)^4$$

4 回とも表が 3 枚出る確率は、$\left(\dfrac{4}{16}\right)^4$

よって、4 回の中で表が出るコインの枚数の最小値が 2 、かつ最大値が 3 である確率は

$$\left(\frac{10}{16}\right)^4-\left(\frac{6}{16}\right)^4-\left(\frac{4}{16}\right)^4=\frac{528}{4096}$$

また、4 回の中で表が出るコインの枚数の最小値が 2 、かつ最大値が 2 である確率は

$$\left(\frac{6}{16}\right)^4=\frac{81}{4096}$$

よって、求める確率は

$$\frac{219}{1024}-\frac{528}{4096}-\frac{81}{4096}=\frac{267}{4096}$$