◇２０２３年　日本医科　後期

1 中身がそれぞれ空である白い箱と黒い箱が１個ずつある。また、互いに区別のつかない球が十分多くある。1から6の目をもつ１つのさいころを１回投げるごとに、出た目が偶数であれば白い箱に目の数に等しい個数の球を入れ、出た目が奇数であれば黒い箱に目の数に等しい個数の球を入れる。ただし、１度箱に入れた球は取り出さない。さいころを３回続けて投げたとき、白い箱に入っている球の個数を n_W、黒い箱に入っている球の個数を n_B として、以下の各問いの空欄に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ。ただし、分数は既約分数をして表すこと。

問１　$n_B=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

問２　$n_B=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

問３　$n_W=8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

問４　$n_W=8$ という条件の下で、$n_B\fallingdotseq 0$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

(解説)

３回の試行におけるサイコロの目の偶奇の回数と n_W、n_B の値は以下のようになる。

	(偶数、奇数)	n_W	n_B
Ⅰ	(3、0)	偶数	0
Ⅱ	(2、1)	偶数	奇数
Ⅲ	(1、2)	偶数	偶数
Ⅳ	(0、3)	0	奇数

問１　$n_B=4$ となるのは表の「Ⅲ」の場合で、目は1、3、偶数(0に対応)が出ればよいので、求める確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\times 3!=\frac{1}{12}$$

問２　$n_B=3$ となるのは表の「Ⅱ」「Ⅳ」の場合で、目は以下のように出ればよい。

（ⅰ）３を１回、偶数の目を2回

（ⅱ）１を３回

よって、求める確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\times 3+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{8}+\frac{1}{216}$$
$$=\frac{7}{54}$$

問３　$n_W=8$ となるのは表の「Ⅰ」「Ⅱ」の場合で、目は以下のように出ればよい。

（ⅰ）２を２回、４を１回

（ⅱ）４を２回、奇数(0に対応)の目を1回

（ⅲ）２と６を１回ずつ、奇数の目を1回

よって、求める確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\times 3+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}\times 3+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\times 3!=\frac{1}{72}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}$$
$$=\frac{5}{36}$$

問４　$n_B\fallingdotseq 0$ となるためには、奇数の目が１回以上出ればよい。

よって、問３の(ⅱ)、(ⅲ)より、$n_B\fallingdotseq 0$ となる確率は

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}$$

よって、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{36}}=\frac{9}{10}$$

2 O を原点とする xy 平面上の曲線 C_1：$y=f(x)=\dfrac{4}{5}x^3-\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{5}$ $(-1\leqq x\leqq 2)$、と曲線 $C_{2,k}$：$y=g_k(x)=x^3-\dfrac{2k+3}{5}x^2+\dfrac{2k}{5}x-\dfrac{2}{5}$ $(-1\leqq x\leqq 2)$（ただし、k は 0 以上の定数）の共有点の個数を $N(k)$ とおく。このとき、以下の各問いに答えよ。問 4 については導出過程を記せ。

問 1　$f(x)=0$ を満たす x（ただし、$-1\leqq x\leqq 2$）の値をすべて求めよ。答えのみでよい。

問 2　曲線 C_1 の概形を図示せよ。凹凸や変曲点は調べなくてよい。答えのみでよい。

問 3　問 1 で求めた各 x に対して、$g_k(x)$ の値を求めよ。答えのみでよい。

問 4　$N(k)$ を求めよ。

（解説）

問 1　$f(x)=0$ より

$$\frac{4}{5}x^3-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}=0$$

$$\therefore\ 4x^3-3x-1=0$$

$$\therefore\ (x-1)(2x+1)^2=0$$

$$\therefore\ x=1、-\frac{1}{2}$$

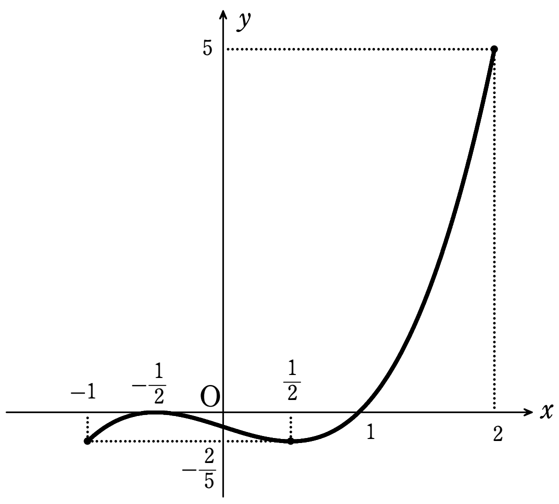
問 2　$f'(x)=\dfrac{12}{5}x^2-\dfrac{3}{5}$

$$=\frac{12}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ \text{より}$$

増減表は、以下のようになる。

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{5}$	↗	0	↘	$-\frac{2}{5}$	↗	5

よって、曲線 C_1 のグラフは以下のようになる。



問 3　$g_k(1)=0$

$$g_k\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{10}k-\frac{27}{40}$$

問 4　曲線 C_1、$C_{2,k}$ の交点の個数より

$$f(x)=g_k(x)\ (-1\leqq x\leqq 2)$$

$$\therefore\ \frac{4}{5}x^3-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}=x^3-\frac{2k+3}{5}x^2+\frac{2k}{5}x-\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ x^3-(2k+3)x^2+(2k+3)x-1=0$$

$$\therefore\ (x-1)\{x^2-2(k+1)x+1\}=0$$

$$\therefore\ x=1、x^2-2(k+1)x+1=0\ \cdots\cdots①$$

① の解の個数について

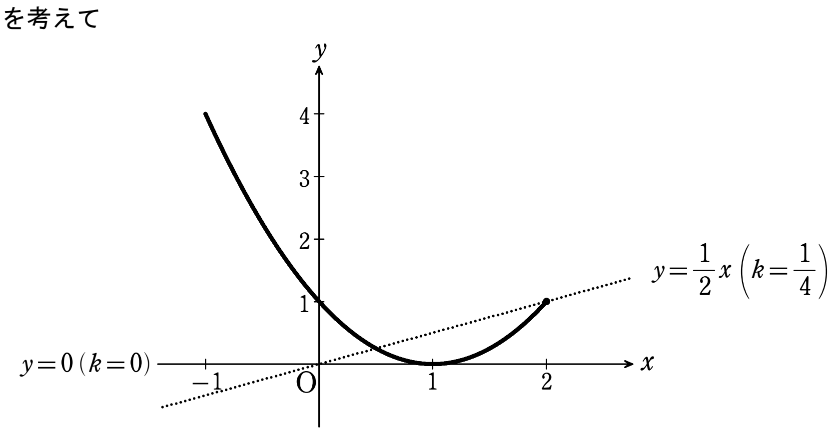
$$x^2-2(k+1)x+1=0$$

$$\therefore\ x^2-2x+1=2kx$$

$$\therefore\ (x-1)^2=2kx$$

よって、$-1\leqq x\leqq 2$ における $\begin{cases}y=(x-1)^2\\ y=2kx\ (k\geqq 0)\end{cases}$ の交点の個数に等しい。

グラフを考えて



① の解の個数は

$$\begin{cases}k=0\ \text{のとき、1 個}\\ 0<k\leqq\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、2 個}\\ k>\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、1 個}\end{cases}$$

となる。

以上より、$x=1$ を加えて（① で $k=0$ のとき、$x=1$ は 2 重解となる）

$$N(k)=\begin{cases}k=0\ \text{のとき、1}\\ 0<k\leqq\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、3}\\ k>\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、2}\end{cases}$$

別解　① の続きから

① の解の個数について

$$x^2-2(k+1)x+1=0$$

$$\therefore\ x^2-2x+1=2kx$$

$x=0$ は、① の解にならないので

$$\frac{(x-1)^2}{2x}=k$$

よって、$-1\leqq x\leqq 2$ における $\begin{cases}y=\dfrac{(x-1)^2}{2x}\\ y=k\ (k\geqq 0)\end{cases}$ の交点の個数に等しい。

$y=\dfrac{(x-1)^2}{2x}$ について

$$y'=\frac{2(x-1)\cdot 2x-(x-1)^2\cdot 2}{4x^2}$$

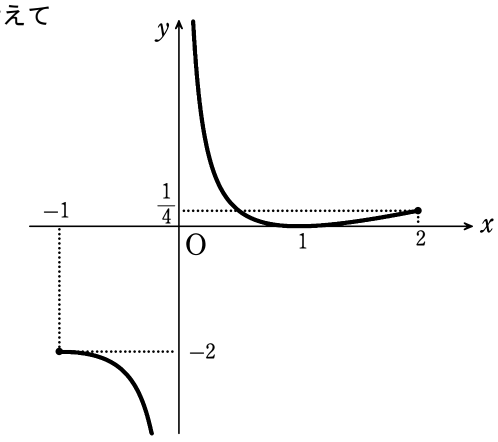
$$=\frac{(x-1)(x+1)}{2x^2}\ \text{より}$$

増減表は、以下のようになる。

x	-1		0		1		2
y'		$-$	／	$-$	0	$+$	
y	-2	↘	／	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$

また、$\displaystyle\lim_{x\to-0}y=-\infty$、$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\infty$ より

グラフを考えて



① の解の個数は

$$\begin{cases}k=0\ \text{のとき、1 個}\\ 0<k\leqq\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、2 個}\\ k>\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、1 個}\end{cases}$$

となる。

以上より、$x=1$ を加えて（① で $k=0$ のとき、$x=1$ は 2 重解となる）

$$N(k)=\begin{cases}k=0\ \text{のとき、1}\\ 0<k\leqq\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、3}\\ k>\dfrac{1}{4}\ \text{のとき、2}\end{cases}$$

3 O を原点とする座標空間において、1 辺の長さが 1 である正四面体を OABC とする。$0<x<1$ を満たす x に対して、辺 AB を $x:(1-x)$ に内分する点を D とし、辺 BC を $x:(1-x)$ に内分する点を E とする。また、線分 AE と線分 CD の交点を P とおき、直線 OE 上の点を Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ となるようにとる。△APC の面積を S とし、△OAQ の面積を T とする。このとき、以下の各問いに答えよ。問 4 については導出過程も記せ。

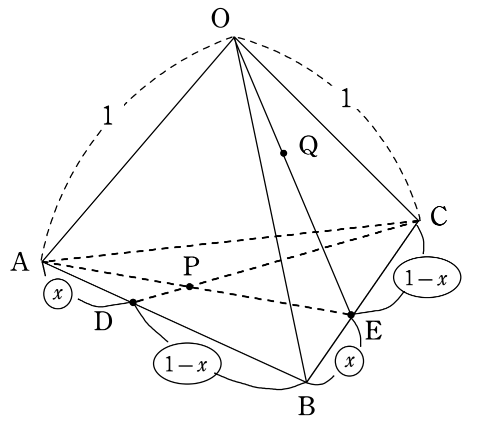
問 1　S を x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$ を x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　$r=x(1-x)$ とおくとき、T を r のみを用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　x を $0<x<1$ の範囲で動かすとき、$\dfrac{S}{T^2}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解説



問 1　メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{1-x}{x}=1$$

$$\therefore\ \mathrm{DP}:\mathrm{PC}=x^2:(1-x)$$

よって、$S=\triangle\mathrm{APC}$

$$=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{DC}}\cdot\triangle\mathrm{ADC}$$

$$=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{DC}}\cdot x\cdot\triangle\mathrm{ABC}$$

$$=\frac{1-x}{x^2+(1-x)}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,x(1-x)}{4(x^2-x+1)}$$

問 2　△OBE で余弦定理より

$$\mathrm{OE}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{BE}^2-2\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{BE}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=1+x^2-2\cdot1\cdot x\cdot\frac{1}{2}$$

$$=x^2-x+1$$

よって、$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\sqrt{x^2-x+1}$

問 3　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ とおくと（t：実数）

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ より

$$t\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-x)\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot x\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$=(1-x)\,x\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{r}{2}$$

ここで、△OAE で余弦定理より

$$\mathrm{AE}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OE}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OE}\cdot\cos\angle\mathrm{AOE}$$

$$\therefore\ 0=1-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}\qquad(\because\ \mathrm{AE}=\mathrm{OE}、\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OE}\cdot\cos\angle\mathrm{AOE})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}$$

よって、$t\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{r}{2}$ より

$$\frac{t}{2}=\frac{r}{2}$$

$$\therefore\ t=r$$

よって、$\mathrm{OQ}:\mathrm{QE}=r:1-r$ となるので

$$T=\triangle\mathrm{OAQ}$$

$$=r\cdot\triangle\mathrm{OAE}$$

$$=r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}})^2}$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{1^2\cdot(x^2-x+1)-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{x^2-x+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{-x(1-x)+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{-r+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{r}{4}\sqrt{3-4r}$$

問 4　$r=x(1-x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より

$0<x<1$ で、$0<r\leqq\dfrac{1}{4}$ となる。

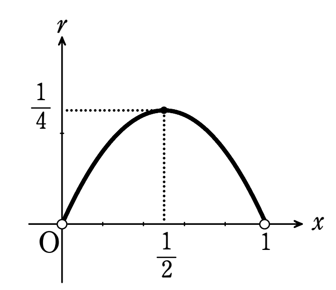


図 1

また、$S=\dfrac{\sqrt{3}\,x(1-x)}{4(x^2-x+1)}$

$$=\frac{\sqrt{3}\,x(1-x)}{4\{-x(1-x)+1\}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,r}{4(1-r)}\quad より$$

$$\frac{S}{T^2}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}\,r}{4(1-r)}}{\left(\dfrac{r}{4}\sqrt{3-4r}\right)^2}$$

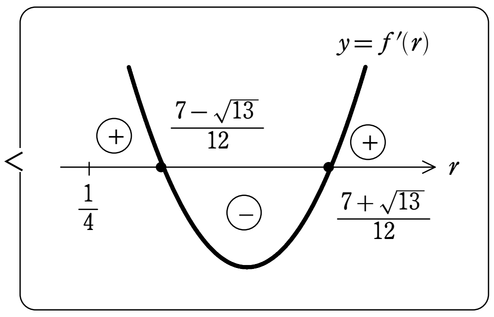
$$=\frac{4\sqrt{3}}{r(1-r)(3-4r)}$$

ここで、$f(r)=r(1-r)(3-4r)$ とおくと

$f(r)=4r^3-7r^2+3r$ より

$f'(r)=12r^2-14r+3$

$f'(r)=0$ より、$r=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$



$\dfrac{1}{4}$ と $\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$ の大小を比べると

$$\frac{1}{4}-\frac{7-\sqrt{13}}{12}=\frac{\sqrt{13}-4}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{16}}{12}<0$$

よって、$\dfrac{1}{4}<\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$ となる。

これより、$0<r\leqq\dfrac{1}{4}$ で、$f'(r)>0$ となるので、$f(r)$ は単調増加となる。

したがって、$f(r)$ は、$r=\dfrac{1}{4}$ で最大値となるので、$\dfrac{S}{T^2}$ は $r=\dfrac{1}{4}$ で最小値をとる。

よって、$r=\dfrac{1}{4}$ のとき、つまり、$x=\dfrac{1}{2}$ で（∵ 図 1）

最小値：$\dfrac{4\sqrt{3}}{f\left(\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ をとる。

4 以下の各問いに答えよ。問２(2)、問３については導出過程も記せ。

問１　次の定積分の値を求めよ。答えのみでよい。

$$\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+4}$$

問２　$n=0$、1、2、……とするとき、$0<a<1$ を満たす a の値に対し

$$I_n(a)=\int_0^a\frac{x^{3n}}{1-x^2}dx$$

とおく。

(1)　次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$0\leqq I_n(a)\leqq\frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}$$

(2)　$I_n(a)-I_{n+1}(a)$ を n と a のみで表せ。

問３　つぎの無限級数は収束する。その和を求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n$$

(解説)

問１

$$\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+4}=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$x+1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと、$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$x:0\to\sqrt{3}-1$ のとき、$\theta:\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{4}$

よって、$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)^2+3}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sqrt{3}\tan\theta)^2+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{3(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$

問２

(1)　$0\leqq x\leqq a\ (<1)$ より

$0\leqq x^3\leqq a^3$

$\therefore\ 0\leqq 1-a^3\leqq 1-x^3$

$\therefore\ 0\leqq\dfrac{1}{1-x^3}\leqq\dfrac{1}{1-a^3}$

$\therefore\ 0\leqq\dfrac{x^{3n}}{1-x^3}\leqq\dfrac{x^{3n}}{1-a^3}$

$\therefore\ 0\leqq\displaystyle\int_0^a\frac{x^{3n}}{1-x^3}dx\leqq\int_0^a\frac{x^{3n}}{1-a^3}dx$

$\therefore\ 0\leqq I_n(a)\leqq\displaystyle\int_0^a\frac{x^{3n}}{1-a^3}dx$

ここで、$\displaystyle\int_0^a\frac{x^{3n}}{1-a^3}dx=\frac{1}{1-a^3}\left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^a$

$$=\frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}$$

よって、$0\leqq I_n(a)\leqq\dfrac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}$

(2)　$\displaystyle I_n(a)-I_{n+1}(a)=\int_0^a\left(\frac{x^{3n}}{1-x^3}-\frac{x^{3n+3}}{1-x^3}\right)dx$

$$=\int_0^a\frac{x^{3n}(1-x^3)}{1-x^3}dx$$

$$=\int_0^a x^{3n}dx$$

$$=\left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^a$$

$$=\frac{a^{3n+1}}{3n+1}$$

問３　$S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{3k}}{3k+1}$ とおくと

$$S_n=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{3k+1}}{3k+1}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\}$$

$$=\frac{1}{a}[\{I_0(a)-I_1(a)\}+\{I_1(a)-I_2(a)\}+\cdots\cdots+\{I_n(a)-I_{n+1}(a)\}]$$

$$=\frac{1}{a}\{I_0(a)-I_{n+1}(a)\}$$

ここで、$(p+q\sqrt{3})^3=p^3+3\sqrt{3}\,p^2q+9pq^2+3\sqrt{3}\,q^3$

$=p^3+9pq^2+(3p^2q+3q^3)\sqrt{3}$　より

$(p+q\sqrt{3})^3=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{4}$ とすると（p、q：有理数）

$$\begin{cases}p^3+9pq^2=-\dfrac{5}{4}\ \cdots\cdots\text{①}\\[2mm] 3p^2q+3q^3=\dfrac{3}{4}\ \cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$

① より、$-\dfrac{4}{5}(p^3+9pq^2)=1$ ……… ③

② より、$4(p^2q+q^3)=1$ ……… ④

③、④ より

$$-\frac{4}{5}(p^3+9pq^2)=4(p^2q+q^3)$$

$\therefore\ -p^3-9pq^2=5(p^2q+q^3)$

$\therefore\ p^3+5p^2q+9pq^2+5q^3=0$

$q=0$ のとき、$p=0$ となり不適

よって、$q\fallingdotseq 0$ において

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3+5\left(\frac{p}{q}\right)^2+9\left(\frac{p}{q}\right)+5=0$$

$\dfrac{p}{q}=t$（t：実数）とおくと

$t^3+5t^2+9t+5=0$

$\therefore\ (t+1)(t^2+4t+5)=0$

$t^2+4t+5=(t+2)^2+1>0$ より

$t=-1$

$\therefore\ \dfrac{p}{q}=-1$

$\therefore\ p=-q$ ……… ⑤

④ に代入して

$8q^3=1$

$\therefore\ q=\dfrac{1}{2}$（$\because$ q は有理数）

⑤ より、$p=\dfrac{1}{2}$

よって、$\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{4}$ より

$a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ とすると（$0<a<1$ を満たす）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}=0$ であるから

問２ (1) より、はさみうちの原理から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(a)=0$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_{n+1}(a)=0$ となる。

これより、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\{I_0(a)-I_{n+1}(a)\}$

$=\dfrac{1}{a}\cdot I_0(a)$　……… ⑥

となる。

よって、$I_0(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\frac{1}{1-x^3}dx$ で

$x=\dfrac{t}{2}$ とおくと、$dx=\dfrac{1}{2}dt$ で

$x:0\to\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき、$t:0\to\sqrt{3}-1$ となるので

$$I_0(a)=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{1-\left(\frac{t}{2}\right)^3}\cdot\left(\frac{1}{2}dt\right)$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{4}{8-t^3}dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{4}{(2-t)(t^2+2t+4)}dt$$

ここで、$\dfrac{4}{(2-t)(t^2+2t+4)}=\dfrac{A}{2-t}+\dfrac{B(2t+2)}{t^2+2t+4}+\dfrac{C}{t^2+2t+4}$ とおくと

$$4=A(t^2+2t+4)+B(2t+2)(2-t)+C(2-t)$$

$$\therefore\ \ 4=(A-2B)t^2+(2A+2B-C)t+4A+4B+2C$$

すべての t で成立より

$$\begin{cases}A-2B=0\\2A+2B-C=0\\4A+4B+2C=4\end{cases}\qquad \therefore\ \ A=\frac{1}{3}、B=\frac{1}{6}、C=1$$

よって、$I_0(a)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2-t}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(t^2+2t+4)'}{t^2+2t+4}+\frac{1}{t^2+2t+4}\right\}dt$

$$=\left[-\frac{1}{3}\log|2-t|+\frac{1}{6}\log|t^2+2t+4|\right]_0^{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi\quad(\because 問1)$$

$$=-\frac{1}{3}\log(3-\sqrt{3})+\frac{1}{6}\log 6+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{6}{(3-\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$

$$=\frac{1}{6}\log(2+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$

したがって、⑥より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n=\frac{1}{a}\cdot I_0(a)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\left\{\frac{1}{6}\log(2+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{36}\{6\log(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}\pi\}$$