1 k を実数の定数とする。1 から 6 の目をもつ大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げて出た目をそれぞれ a、b とするとき、二次関数 $f_k(x)$ を

$$f_k(x)=\frac{a}{2}x^2+(a+b-k)x-\frac{b}{2}$$

と定める。O を原点とする xy 平面における放物線 C：$y=f_k(x)$ と x 軸との交点を x 座標の値が小さい順に P、Q とし、C と y 軸との交点を R とする。このとき、△PQR が直角三角形となる確率を $P_0(k)$、直角二等辺三角形となる確率を $P_1(k)$、正三角形となる確率を $P_2(k)$ として、以下の各問いの空欄に適する数値を求めよ。

問 1　確率 $P_0(k)$ は k の値によらずに $P_0(k)=\boxed{ア}$ となる。

問 2　$P_1(k)\neq 0$ となるような k の値を求めると $k=\boxed{イ}$、または $\boxed{ウ}$

（ただし、$\boxed{イ}<\boxed{ウ}$）となる。

このとき、$P_1\left(\boxed{イ}\right)=\boxed{エ}$、$P_1\left(\boxed{ウ}\right)=\boxed{オ}$ となる。

問 3　$P_2(k)\neq 0$ となるような k の値を求めると $k=\boxed{カ}$、または $\boxed{キ}$

（ただし、$\boxed{カ}<\boxed{キ}$）となる。

このとき、$P_2\left(\boxed{カ}\right)=\boxed{ク}$、$P_2\left(\boxed{キ}\right)=\boxed{ケ}$ となる。

解説

a、b は $1\leqq a\leqq 6$、$1\leqq b\leqq 6$ を満たす整数より、$y=f_k(x)$ は下に凸な放物線で、

$f_k(0)=-\dfrac{b}{2}<0$ を満たす。

よって、$y=f_k(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わるので、交点を P$(\alpha,\ 0)$、Q$(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta)$ とすると、$f_k(x)=0$ の 2 解が $x=\alpha$、β となる。

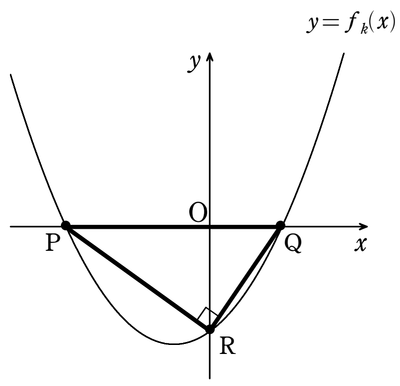
よって、解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{2(a+b-k)}{a} & \cdots\cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=-\dfrac{b}{a} & \cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

となる。

また、R$\left(0,\ -\dfrac{b}{2}\right)$ で、② より、$\alpha<0<\beta$ となる。

問 1　△PQR が直角三角形となる条件は、∠PRQ が直角となることである。



つまり、$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$

$\overrightarrow{RP}=\left(-\alpha,\ \dfrac{b}{2}\right)$、$\overrightarrow{RQ}=\left(-\beta,\ \dfrac{b}{2}\right)$ より

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\alpha\beta+\frac{b^2}{4}$$

$$=-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{4}\quad(\because ②)$$

よって、$-\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{4}=0$

$\therefore\ ab=4$

a、b は $1\leqq a\leqq 6$、$1\leqq b\leqq 6$ を満たす整数より

$(a,\ b)=(1,\ 4)$、$(2,\ 2)$、$(4,\ 1)$ ………③

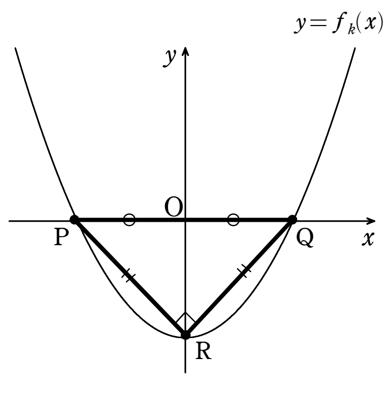
よって、求める確率は

$$P_0(k)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

問 2　△PQR が直角二等辺三角形となる条件は

$$\begin{cases}\angle PRQ\ \text{が直角} \\ RP=RQ\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}③ \\ |\alpha|=|\beta| & \cdots\cdots\cdots ④\end{cases}$$



④ と $\alpha<0<\beta$ より

$-\alpha=\beta$

$\therefore\ \alpha+\beta=0$

$\therefore\ \dfrac{-2(a+b-k)}{a}=0\quad(\because ①)$

$\therefore\ k=a+b$ ………⑤

よって、③、⑤ より、$k=4$、5

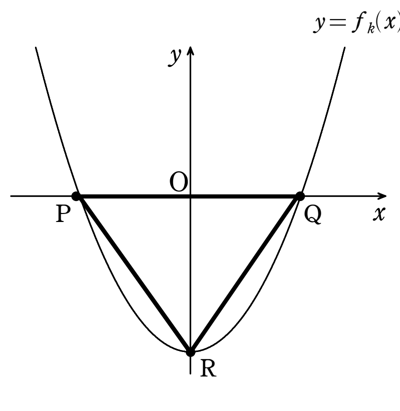
$k=4$ のとき、$(a,\ b)=(2,\ 2)$ の 1 通りより、$P_1(4)=\dfrac{1}{36}$

$k=5$ のとき、$(a,\ b)=(1,\ 4)$、$(4,\ 1)$ の 2 通りより、$P_1(5)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

問 3　△PQR が正三角形となる条件は

$$\begin{cases}RP=RQ \\ PQ:OR=2:\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}⑤ \\ 2OR=\sqrt{3}\,PQ & \cdots\cdots\cdots ⑥\end{cases}$$



⑥ より

$2\cdot\dfrac{b}{2}=\sqrt{3}(\beta-\alpha)$

$\therefore\ b=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$\therefore\ b^2=3\left\{0-4\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)\right\}$

$\therefore\ ab=12$

$\therefore\ (a,\ b)=(2,\ 6)$、$(3,\ 4)$、$(4,\ 3)$、$(6,\ 2)$

⑤ より、$k=7$、8

$k=7$ のとき、$(a,\ b)=(3,\ 4)$、$(4,\ 3)$ の 2 通りより、$P_2(7)=\dfrac{1}{18}$

$k=8$ のとき、$(a,\ b)=(2,\ 6)$、$(6,\ 2)$ の 2 通りより、$P_2(8)=\dfrac{1}{18}$

2 O を原点とする xyz 空間において、次の 2 つの球面 S_1、S_2 が与えられている。

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=1$$

$$S_2 : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$$

S_1 と S_2 の交わりの図形を E とし、E を含む平面 π との交線を ℓ とする。xy 平面において、ℓ を y 軸に関して対称移動して得られる直線を m とする。ℓ と m の交点を A、m と x 軸の交点を B、ℓ と x 軸との交点を C とし、E 上の点を P として四面体 PABC を考えるとき、以下の各問いに答えよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　π の方程式を x、y、z を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　xy 平面内における ℓ の方程式を x、y を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　xy 平面内における m の方程式を x、y を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　四面体 PABC の体積 V の最小値を求めよ。また、そのときの P の座標を求めよ。

（解説）

S_1 と S_2 の半径をそれぞれ、r_1、r_2、中心間距離を d とすると

$r_1=1$、$r_2=\sqrt{5}$、$d=\sqrt{1^2+2^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$ より、$r_2-r_1<d<r_2+r_1$ が成り立つ。

よって、S_1 と S_2 の交線は円となる。

問 1　k を実数の定数として、

$$x^2+y^2+(z-2)^2-1+k\{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-5\}=0$$

は、S_1 と S_2 のすべての共有点を通る図形の方程式を表す。

$k=-1$ のとき、平面 ：$x+2y+z-3=0$ となるので、E を含む平面 π の方程式は

$$x+2y+z-3=0 \cdots\cdots ①$$

問 2　① に $z=0$ を代入して、直線 ℓ の方程式は

$$x+2y-3=0$$

問 3　ℓ と m は y 軸対称より、直線 m の方程式は

$$(-x)+2y-3=0$$

$$\therefore\quad x-2y+3=0$$

問 4　$\mathrm{A}\left(0、\dfrac{3}{2}、0\right)$、$\mathrm{B}(-3、0、0)$、$\mathrm{C}(3、0、0)$ より

△ABC の面積は、$\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$

よって、点 P を $(x、y、z)$ とすると、四面体 PABC の体積 V の最小値は

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times|z|=\frac{3}{2}|z| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (※)$$

となる。

ここで、点 P は図形 E 上を動くので

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \cdots\cdots ② \\ x+2y+z-3=0 \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たす。

③ より、$x=-2y-z+3$

② に代入して

$$(-2y-z+3)^2+y^2+(z-2)^2=1$$

$$\therefore\quad 5y^2+4(z-3)y+2z^2-10z+12=0 \cdots\cdots ④$$

y が実数として存在するような実数 z のとり得る値の範囲は

$$D/4=4(z-3)^2-5(2z^2-10z+12)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -6z^2+26z-24\geqq 0$$

$$\therefore\quad -(3z-4)(z-3)\geqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{4}{3}\leqq z\leqq 3$$

これより、$z=\dfrac{4}{3}$ のとき、V の最小値は $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=2$

また、$z=\dfrac{4}{3}$ のとき、④ は重解 $y=-\dfrac{2(z-3)}{5}=\dfrac{2}{3}$ をもつ。

よって、③ より、$x=-2\cdot\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}+3=\dfrac{1}{3}$

以上より、$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{3}、\dfrac{2}{3}、\dfrac{4}{3}\right)$ のとき、最小値 2 をとる。

参考　$z=\dfrac{4}{3}$ を ②、③ に代入して x、y を求めてもよい。

別解　(※) の続きから

図 1

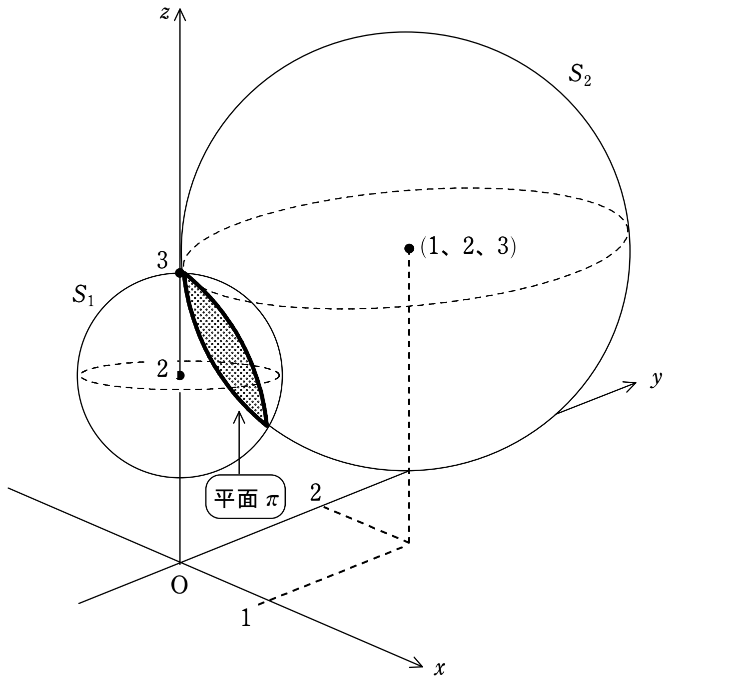
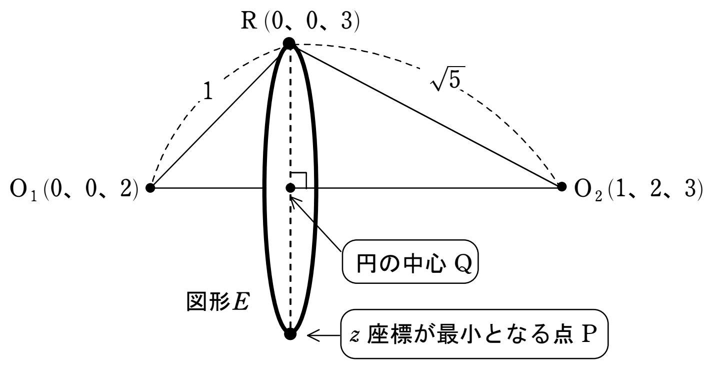


図 2



S_1 の中心を $\mathrm{O_1}$、S_2 の中心を $\mathrm{O_2}$、図形 E である円の中心を Q、$(0、0、3)$ を R とすると、図 1 で、$\mathrm{O_2R}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}=S_2$ の半径 より、S_1 と S_2 は R を共有する。

この点は図形 E において z 座標が最大の点である。

よって、図 2 より図形 E 上で z 座標が最小となる点は、直線 QR と図形 E との交点である。

$\mathrm{O_1O_2}=\sqrt{1^2+2^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$、$\mathrm{O_1Q}=s$、$\mathrm{QR}=t$ として、$\triangle\mathrm{O_1QR}$ と $\triangle\mathrm{O_2QR}$ で三平方の定理を用いると

$$\begin{cases} s^2+t^2=1 \\ (\sqrt{6}-s)^2+t^2=5 \end{cases} \quad より、s=\frac{\sqrt{6}}{6}、t=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

よって、$\mathrm{O_1Q}:\mathrm{O_2Q}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}:\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}=1:5$　より

点 Q の座標は、$\dfrac{1}{6}\cdot(1、2、3)+\dfrac{5}{6}\cdot(0、0、2)=\left(\dfrac{1}{6}、\dfrac{1}{3}、\dfrac{13}{6}\right)$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\dfrac{1}{6}、\dfrac{1}{3}、-\dfrac{5}{6}\right)$ となるので、図形 E 上で z 座標が最小となる点を $\mathrm{P_{min}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_{min}}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+2\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$$

$$=(0、0、3)+2\cdot\left(\frac{1}{6}、\frac{1}{3}、-\frac{5}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}、\frac{2}{3}、\frac{4}{3}\right)$$

以上より、$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{3}、\dfrac{2}{3}、\dfrac{4}{3}\right)$ のとき、最小値 $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=2$ となる。

3 $n=1$、2、3、…… に対して、$\left(\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1\right)^{n+2}$ の展開式の x^3 の係数を A_n とするとき、以下の問１～問３の空欄に適する１以上の整数と求めよ。問４については導出過程も記せ。

問１　$A_n=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\left(n+\boxed{ウ}\right)\left(n+\boxed{エ}\right)\left(n+\boxed{オ}\right)$

（ただし、$\boxed{ウ}<\boxed{エ}<\boxed{オ}$）である。

問２　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。

問３　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

問４　問１で求めた A_n に関して、$a_n=n+\boxed{ウ}$、$b_n=n+\boxed{エ}$、$c_n=n+\boxed{オ}$ とするとき、極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

を求めよ。ただし、必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ は証明なしに用いてもよい。

（解説）

問１　$\left(\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1\right)^{n+2}$ の展開式の一般項は

$$\frac{(n+2)!}{p!q!r!}\cdot\left(\frac{3}{2}x^2\right)^p\cdot\left(\frac{3}{2}x\right)^q=\frac{(n+2)!}{p!q!r!}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{p+q}\cdot x^{2p+q}$$

ただし、p、q、r は $p+q+r=n+2$、$p\geqq0$、$q\geqq0$、$r\geqq0$ を満たす整数。

$2p+q=3$ より

$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ n-1)$、$(1,\ 1,\ n)$

よって、x^3 の係数 A_n は

$$A_n=\frac{(n+2)!}{0!3!(n-1)!}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{(n+2)!}{1!1!n!}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{9}{16}(n+2)(n+1)n+\frac{9}{4}(n+2)(n+1)\quad\cdots\cdots①$$

$$=\frac{9}{16}(n+2)(n+1)(n+4)$$

問２　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{9}{16}\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)k+\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)$　（∵ ①）

$$=\frac{9}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{(k+3)(k+2)(k+1)k-(k+2)(k+1)k(k-1)\}$$

$$+\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{(k+3)(k+2)(k+1)-(k+2)(k+1)k\}$$

$$=\frac{9}{64}[(4\cdot3\cdot2\cdot1-3\cdot2\cdot1\cdot0)+(5\cdot4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2\cdot1)+\cdots\cdots$$

$$\cdots+\{(n+3)(n+2)(n+1)n-(n+2)(n+1)n(n-1)\}]$$

$$+\frac{3}{4}[(4\cdot3\cdot2-3\cdot2\cdot1)+(5\cdot4\cdot3-4\cdot3\cdot2)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\{(n+3)(n+2)(n+1)-(n+2)(n+1)n\}]$$

$$=\frac{9}{64}\{(n+3)(n+2)(n+1)n-3\cdot2\cdot1\cdot0\}$$

$$+\frac{3}{4}\{(n+3)(n+2)(n+1)-3\cdot2\cdot1\}$$

$$=\frac{9}{64}(n+3)(n+2)(n+1)n+\frac{3}{4}(n+3)(n+2)(n+1)-\frac{9}{2}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{9}{64}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right.$

$$\left.+\frac{3}{4n}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{9}{2n^4}\right\}$$

$$=\frac{9}{64}$$

（別解）　自然数 k について、以下の不等式は常に成り立つ。

$$k^3<(k+1)(k+2)(k+4)<(k+4)^3$$

よって、$\displaystyle\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)(k+4)<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+4)^3$

$$\therefore\quad\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k<\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+4)^3\quad\cdots\cdots(※)$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$

$$=\frac{9}{16}\int_0^1x^3dx$$

$$=\frac{9}{16}\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{9}{64}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+4)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=5}^{n+4}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

$$=\frac{9}{16}\int_0^1x^3dx$$

$$=\frac{9}{16}\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{9}{64}$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{9}{64}$$

（別解）　(※)の続き

$$\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k<\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+4)^3$$

$$\therefore\quad\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k<\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k^3+12k^2+48k+64)$$

$$\therefore\quad\frac{9}{64}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k<\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\cdot\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+12\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right.$$

$$\left.+48\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+64n\right\}$$

$$\therefore\quad\frac{9}{64}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k<\frac{9}{16}\left\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{24}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{64}{n^3}\right\}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{9}{64}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{9}{64}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9}{16}\left\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{24}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{64}{n^3}\right\}=\frac{9}{64}$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{9}{64}$$

問３　$\displaystyle\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{A_k}=\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)}$

$$=\frac{k+3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$=\frac{(k+4)-1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right\}$$

よって

$$\frac{9}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}\right]$$

$$-\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4\cdot5}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{24}-\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}$$

$$=\frac{5}{72}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{9}\left\{\frac{5}{72}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}$

$$=\frac{10}{81}$$

（別解）　$\displaystyle\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+4}$　とおくと

$$1=a(k+2)(k+4)+b(k+1)(k+4)+c(k+1)(k+2)$$

$$\therefore\quad1=(a+b+c)k^2+(6a+5b+3c)k+8a+4b+2c$$

すべての k で成立するので

$\begin{cases}a+b+c=0\\6a+5b+3c=0\\8a+4b+2c=1\end{cases}$　より、$a=\dfrac{1}{3}$、$b=-\dfrac{1}{2}$、$c=\dfrac{1}{6}$

よって、$\displaystyle\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k+4}$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{k+1}-\frac{3}{k+2}+\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)\right\}\quad\text{より}$$

$$\frac{9}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$

$$=\frac{5}{72}-\frac{1}{3(n+2)}+\frac{1}{6(n+3)}+\frac{1}{6(n+4)}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{9}\left\{\frac{5}{72}-\frac{1}{3(n+2)}+\frac{1}{6(n+3)}+\frac{1}{6(n+4)}\right\}$

$$=\frac{10}{81}$$

問４　$a_n=n+1$、$b_n=n+2$、$c_n=n+4$ より、$a_n+b_n+c_n=3n+7$

よって、$\displaystyle\log\frac{1}{n^2}\log\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$=\log\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(3n+7)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\log\left\{\frac{1}{n^{2n}}\cdot\frac{(3n+7)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(3n+7)}{n^{2n}}\quad\cdots\cdots\cdots(※※)$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(3n+7)}{n^{2n+7}}\cdot n^7$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3n+7}{n}+\frac{1}{n}\log n^7$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n+7}\log\left(\frac{k}{n}\right)+7\cdot\frac{\log n}{n}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \log\frac{1}{n^2}\log\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n+7}\log\left(\frac{k}{n}\right)+7\cdot\frac{\log n}{n}\right\}$$

$$=\int_1^3\log x\,dx\qquad\left(\because\ \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0\right)$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^3$$

$$=3\log 3-2$$

$$=\log\frac{27}{e^2}$$

$y=\log x$ は単調増加より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{e^2}$$

別解　(※※) の続き

$$\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(3n+7)}{n^{2n}}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+2n}{n}\cdot(3n+1)(3n+2)\cdots\cdots(3n+7)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{7}\log(3n+k)$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \log\frac{1}{n^2}\log\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{7}(3n+k)\cdot\frac{\log(3n+k)}{3n+k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{7}\left(3+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{\log(3n+k)}{3n+k}\right\}$$

$$=\int_0^2\log(1+x)\,dx\qquad\left(\because\ \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0\right)$$

$$=\Big[(x+1)\log(x+1)-(x+1)\Big]_0^2$$

$$=3\log 3-2$$

$$=\log\frac{27}{e^2}$$

$y=\log x$ は単調増加より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{e^2}$$

4 Oを原点とするxyz空間において、xy平面（平面$z=0$）内の曲線C：$y=x^2$上の点P$(t、t^2、0)$（ただし、$0<t<1$）におけるCの接線ℓと直線$x=1$との交点をQとする。また、A$(1、0、0)$、B$(1、1、0)$、R$(t、t^2、t-t^2)$（ただし、$0<t<1$）とする。
tが$0<t<1$を満たしながら動くとき三角形PQRが通過してできる立体に、線分OAと点Bを付け加えた立体をKとし、その体積をVとおく。$0\leqq a\leqq 1$を満たすaに対して、Kを平面$x=a$の共通部分からなる平面図形$K(a)$の面積を$S(a)$とおく。ただし、1点あるいは線分の面積は0とみなして考える。このとき、以下の各問いに答えよ。問3～問5については導出過程も記せ。

問1　xy平面内における接線ℓの方程式をx、y、tを用いて表せ。また、Qの座標を$\mathrm{Q}\left(1、\boxed{\text{ア}}、0\right)$と表すとき、$\boxed{\text{ア}}$に入る適切な式を$t$を用いて表せ。答えのみでよい。

問2　xy平面（平面$z=0$）内の点$(a、b、0)$を$0<a<1$かつ$0<b\leqq a^2$を満たすようにとる。このとき、点$(a、b、0)$が線分PQ上の点となるように$t=t_{a、b}$ $(0<t<1)$の値を定め、$t_{a、b}$をaとbを用いて表せ。答えのみでよい。

問3　$0\leqq a\leqq 1$を満たすaに対して、平面図形$K(a)$が、次の1つの等式と2つの不等式

$$x=a、0\leqq y\leqq a^2、0\leqq z\leqq \boxed{\text{イ}}$$

により表される平面図形と一致するように、$\boxed{\text{イ}}$に入る適切な式をyとaを用いて表せ。

問4　$S(a)$を求めよ。

問5　Vを求めよ。

解説

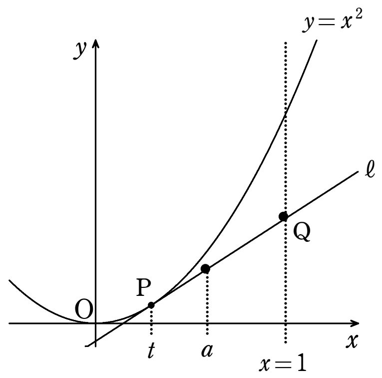
問1　$y=x^2$より、$y'=2x$

よって、Pにおける接線ℓは

$y=2t(x-t)+t^2$

$\therefore\ y=2tx-t^2$

$x=1$との交点Qは、Q$(1、2t-t^2、0)$となる。



問2　$(a、b、0)$が線分PQ上より

$b=2ta-t^2$

$\therefore\ t^2-2at+b=0$

$\therefore\ t=a\pm\sqrt{a^2-b}$

$(0<b\leqq a^2$より、tは実数解$)$

$(a、b、0)$が線分PQ上より、$t_{a、b}\leqq a$を満たすので

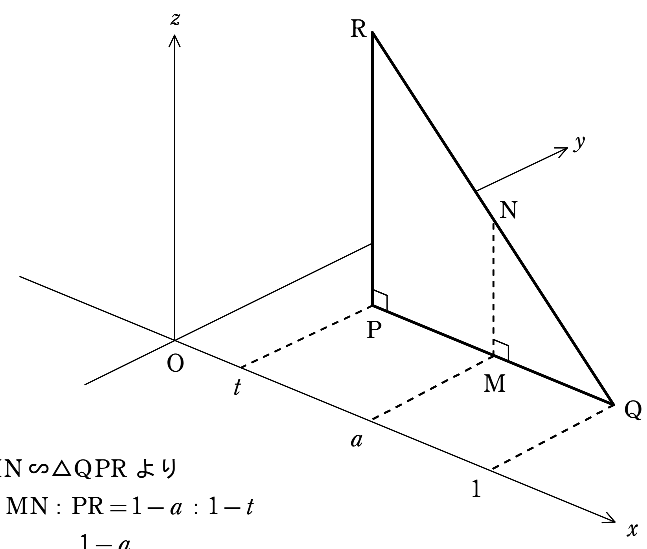
$t_{a、b}=a-\sqrt{a^2-b}$

問3　$0<a<1$のとき

$0<y\leqq a^2$を満たすyにおいて、M$(a、y、0)$が線分PQ上にあるとき

問2より、$t=a-\sqrt{a^2-y}$となる。

このとき、線分QRと平面$x=a$との交点をNとすると



$\triangle$QMN$\backsim\triangle$QPRより

MN : PR$=1-a : 1-t$

$\therefore\ \mathrm{MN}=\dfrac{1-a}{1-t}\,\mathrm{PR}$

$=\dfrac{1-a}{1-t}(t-t^2)$

$=(1-a)t$

$=(1-a)\left(a-\sqrt{a^2-y}\right)$

よって、線分MN上のzのとり得る値の範囲は

$0\leqq z\leqq(1-a)\left(a-\sqrt{a^2-y}\right)$

（ただし、$a=0$のとき、$(x、y、z)=(0、0、0)$で、

$a=1$のとき、$x=1$、$0\leqq y\leqq 1$、$z=0$となり成立。）

よって、$x=a$、$0\leqq y\leqq a^2$、$0\leqq z\leqq(1-a)\left(a-\sqrt{a^2-y}\right)$

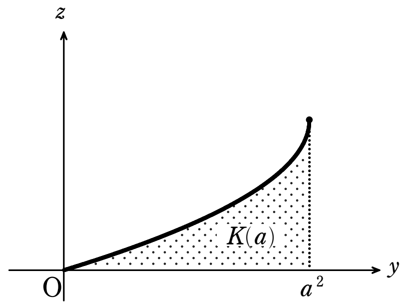
問4　平面$x=a$上で曲線$z=(1-a)\left(a-\sqrt{a^2-y}\right)$ $y=a^2$、y軸で囲まれた図形が$K(a)$より、その面積$S(a)$は

$$S(a)=\int_0^{a^2}(1-a)\left(a-\sqrt{a^2-y}\right)dy$$

$$=\left[(1-a)\left(ay+\frac{2}{3}(a^2-y)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^{a^2}$$

$$=(1-a)\left(a^3-\frac{2}{3}a^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}a^3(1-a)$$



問5　$V=\displaystyle\int_0^1 S(a)da$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}a^3(1-a)da$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{5}a^5\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{60}$$