1 (1)　座標平面において、楕円$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点$P(a,\ b)$における法線の方程式は

$$bx-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}ay=-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}ab$$

である。

(2)　一辺の長さが 1 の正十二面体 P の頂点のひとつを O とし、P の三つの頂点 A、B、C を頂点 O の端点とする P の三つの辺が線分 OA、OB、OC となるようにとる。さらに、二点 A、B 間の距離を r とする。

このとき、等式

$$(r-1)^2=\boxed{オ}-r$$

が成立する。ベクトル$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積はふたつの有理数 $a=-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ と

$b=-\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ により、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a+br$$

と表される。四面体OABC の体積を V とすると、$\dfrac{V}{r}=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ である。

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{9+7\tan|x|}\ \cos^2 x}=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。

(4)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx=\frac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

(解説)

(1)　楕円$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 P における接線 ℓ の方程式は

$$\ell:\ \frac{a}{8}x+\frac{b}{3}y=1$$

と書ける。ℓ の法線ベクトルは $\left(\dfrac{a}{8},\ \dfrac{b}{3}\right)=\dfrac{1}{24}(3a,\ 8b)$ より、

P における方向ベクトルのひとつは、$(-8b,\ 3a)$ となる。

よって、P における法線の方程式は

$$-8b(x-a)+3a(y-b)=0$$

$$\therefore\quad bx-\frac{3}{8}ay=\frac{5}{8}ab \qquad \text{答}$$

(2)　(オ)

正十二面体の 1 つの面は正五角形である。

図 1 の正五角形OADEB において

AB とOD の交点を F とすると

図 2 より、$\triangle FOA \backsim \triangle ADO$ より

$r-1:1=1:r$

$\therefore\quad r(r-1)=1$

$\therefore\quad r^2-r=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$

$\therefore\quad r^2-2r=1-r$

$\therefore\quad (r-1)^2=2-r \qquad$ 答

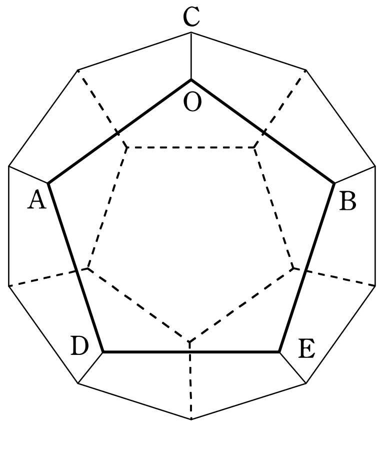

図 1

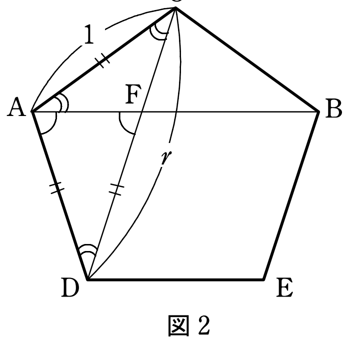

図 2

別解　正五角形OADEBは円に内接するので

四角形OADB も円に内接する。

よって、トレミーの定理より

$r\cdot r=1\cdot r+1\cdot 1$

$\therefore\quad r^2=r+1$

$\therefore\quad r^2-2r=1-r$

$\therefore\quad (r-1)^2=2-r \qquad$ 答

(カ)～(コ)　△OAB で余弦定理より

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$$

$\therefore\quad r^2=1+1-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2-r^2}{2}$

① より、$r^2=r+1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$

よって、$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2-(r+1)}{2}$

$$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)r \qquad \text{答}$$

(サ)～(ス)　点 O から △ABC に下ろした垂線の足を H とすると

OA＝OB＝OC より H は△ABC の外接円の中心になる。

△ABC において、正弦定理より

$$2AH=\frac{AB}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore\quad AH=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

△OAH で三平方の定理より

$$OA^2=AH^2+OH^2$$

$$\therefore\quad 1=\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2+OH^2$$

よって、$OH=\sqrt{1-\dfrac{r^2}{3}}$

したがって、四面体OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot OH$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot\sqrt{1-\frac{r^2}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}r^2\sqrt{1-\frac{r^2}{3}}$$

となるので、

$$\frac{V}{r}=\frac{\sqrt{3}}{12}r\sqrt{1-\frac{r^2}{3}}$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{r^2(3-r^2)}$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{(r+1)(2-r)} \quad (\text{② より})$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{-r^2+r+2}$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{-(r+1)+r+2} \quad (\text{② より})$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{1}$$

$$=\frac{1}{12} \qquad \text{答}$$

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{9+7\tan|x|}\ \cos^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{9+7\tan x}\cos^2 x}$　(偶関数より)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x)'}{\sqrt{9+7\tan x}}dx$$

$$=2\left[\frac{2}{7}\sqrt{9+7\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{7}(\sqrt{16}-\sqrt{9})$$

$$=\frac{4}{7} \qquad \text{答}$$

(4)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx=I$ とおく

$\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx$ と変形できるので

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx$ について

$x=-t$ とおくと、$dx=-dt$ より

x	$-\frac{\pi}{4}\to 0$
t	$\frac{\pi}{4}\to 0$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sqrt{4+5\tan|-t|}}{1-\sin(-t)}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|t|}}{1+\sin t}dt$$

となるので

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|t|}}{1+\sin t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\cdot\sqrt{4+5\tan x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{4+5\tan x}\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4+5\tan x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4+5\tan x}\cdot(\tan x)'\,dx$$

$$=2\left[\frac{2}{15}(4+5\tan x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{15}\left(9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{76}{15}$$ 答

2 座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標 $(x、y)$ が

$$x=\frac{1}{4}t^4、\ y=\frac{\sqrt{3}}{5}t^5$$

で表されるときを考える。

(1)　時刻 $t=4$ における点Ｐの速さは $\boxed{アイウ}$ である。

(2)　時刻 $t=3$ における点Ｐの加速度は $\boxed{エオカ}$ である。

(3)　時刻 $t=0$ から $t=1$ までの点Ｐの道のりは $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコサ}}$ である。

解説

(1)　点Ｐの時刻 t における速度を $\vec{v}(t)$ とすると

$$\vec{v}(t)=\left(\frac{dx}{dt}、\frac{dy}{dt}\right)=(t^3、\sqrt{3}\,t^4)$$

よって、$|\vec{v}(t)|=\sqrt{(t^3)^2+(\sqrt{3}\,t^4)^2}$

$=t^3\sqrt{1+3t^2}$

ゆえに、$|\vec{v}(4)|=4^3\sqrt{1+3\cdot4^2}$

$=448$ 答

(2)　点Ｐの時刻 t における加速度を $\vec{a}(t)$ とすると

$$\vec{a}(t)=\left(\frac{d^2x}{dt^2}、\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(3t^2、4\sqrt{3}\,t^3)$$

よって、$|\vec{a}(t)|=\sqrt{(3t^2)^2+(4\sqrt{3}\,t^3)^2}$

$=t^2\sqrt{9+48t^2}$

ゆえに、$|\vec{a}(3)|=3^2\sqrt{9+48\cdot3^2}$

$=189$ 答

(3)　求める道のりを L とすると

$$L=\int_0^1|\vec{v}(t)|\,dt$$

$$=\int_0^1 t^3\sqrt{1+3t^2}\,dt$$

$1+3t^2=u$ とおくと $\left(t^2=\dfrac{1}{3}(u-1)\right)$、$6tdt=du$　より

$$L=\int_1^4\frac{1}{3}(u-1)\sqrt{u}\cdot\frac{1}{6}du$$

$$=\frac{1}{18}\int_1^4\left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{18}\left\{\frac{2}{5}\left(4^{\frac{5}{2}}-1\right)-\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{5}(32-1)-\frac{1}{3}(8-1)\right\}$$

$$=\frac{58}{135}$$ 答

3 当たりくじ３本とはずれくじ６本からなるくじについて、次の試行 (ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ) を順に行う。

(ⅰ)　はじめに、２本を選び、その２本が取り除かれる。この時点で取り除かれたくじが当たりかはずれか知らされない。

(ⅱ)　次に、残りの７本のくじのうちはずれくじが１本取り除かれる。

(ⅲ)　最後に、残りの６本のうち１本を引く。

この一連の試行において、事象A、B、C、Eを

A：「(ⅰ)において取り除かれたくじが両方ともはずれ 」

B：「(ⅰ)において取り除かれたくじの１本だけが当たり 」

C：「(ⅰ)において取り除かれたくじが両方とも当たり 」

E：「(ⅱ)において引いたくじが当たり 」

により定める。このとき、事象Aの確率は

$$P(A)=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$$

であり、事象Bあが起こったときのEの起こる条件つき確率は

$$P_B(E)=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$$

であり、事象$C\cap E$の確率は

$$P(C\cap E)=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$$

であり、事象Eの確率は

$$P(E)=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$$

である。

解説

(ア)～(ウ)

くじの選び方の総数は ${}_9C_2$ 通り。

はずれくじの選び方の総数は ${}_6C_2$ 通り。

よって、求める確率は、$P(A)=\dfrac{{}_6C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{5}{12}$　答

(エ)、(オ)

事象Bが起こったとき、くじは当たりくじ２本、はずれくじ４本より

求める確率は、$P_B(E)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$　答

(カ)～(ク)

同様に考えて、$P(C)=\dfrac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{1}{12}$

事象Cが起こったとき、くじは当たりくじ１本、はずれくじ５本より、$P_c(E)=\dfrac{1}{6}$

よって、求める確率は、

$$P(C\cap E)=P(C)\cdot P_c(E)$$
$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{72}\quad 答$$

(ケ)～(サ)

同様に考えて、

$$P(A\cap E)=P(A)\cdot P_A(E)=\frac{5}{12}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{24}$$

$$P(B\cap E)=P(B)\cdot P_B(E)=\frac{{}_3C_1\times{}_6C_1}{{}_9C_2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

よって、求める確率は、

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)$$
$$=\frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{72}$$
$$=\frac{7}{18}\quad 答$$

4 四次方程式

$$x^4-8x^3+cx^2+4x-6=0\quad (c\text{ は実数})$$

の四つの解をα、β、γ、δとする。

二つの解αとβの積が$\alpha\beta=\sqrt{2}$であるとき

$$\gamma^2\delta^2=\boxed{アイ}$$

であり

$$\gamma+\delta=\boxed{ウ}-\frac{\sqrt{2}}{\boxed{エ}}$$

である。また、このとき

$$c=\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$$

である。

解説

(ア)、(イ)　四次方程式 $x^4-8x^3+cx^2+4x-6=0$ の解がα、β、γ、δより

$$x^4-8x^3+cx^2+4x-6=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

が成り立つ。右辺を展開して整理すると

$$(\text{右辺})=x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta$$

となるので、両辺を係数比較して

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=8 & \cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c & \cdots\cdots\cdots\cdots ②\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-4 & \cdots\cdots\cdots\cdots ③\\ \alpha\beta\gamma\delta=-6 & \cdots\cdots\cdots\cdots ④\end{cases}$$

$\alpha\beta=\sqrt{2}$ より、④より

$$\sqrt{2}\gamma\delta=-6$$
$$\therefore\ \gamma\delta=-3\sqrt{2}\quad\cdots\cdots\cdots ⑤$$

よって、$\gamma^2\delta^2=18$　答

(ウ)、(エ)

①より、$\alpha+\beta=8-(\gamma+\delta)$　$\cdots\cdots\cdots$⑥

③より、$\alpha\beta(\gamma+\delta)+(\alpha+\beta)\gamma\delta=-4$

$\alpha\beta=\sqrt{2}$、⑤、⑥より

$$\sqrt{2}(\gamma+\delta)+\{8-(\gamma+\delta)\}(-3\sqrt{2})=-4$$
$$\therefore\ 4\sqrt{2}(\gamma+\delta)=24\sqrt{2}-4$$
$$\therefore\ \gamma+\delta=6-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\cdots\cdots\cdots ⑦\quad 答$$

(オ)、(カ)

②より、$c=\alpha\beta+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\gamma\delta$

⑥より、$c=\alpha\beta+\{8-(\gamma+\delta)\}(\gamma+\delta)+\gamma\delta$

$\alpha\beta=\sqrt{2}$、⑤、⑦より

$$c=\sqrt{2}+\left\{8-\left(6-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\left(6-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(6-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\sqrt{2}$$
$$=\frac{23}{2}\quad 答$$