◇２０２２年　昭和大学医学部 Ⅱ期

1 座標空間において、O(0、0、0)、A(1、−1、−1)、B(2、0、2)、C(2、2、0) を頂点とする四面体がある。点 O から△ABC が作る平面に向かって垂線 OH を下ろす、線分AH の延長と線分 BC の交点を P とする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。

(2) 四面体の体積を求めよ。

(3) 線分AH と線分HP の長さの比 AH : HP を求めよ。

(4) 点 P の座標を求めよ。

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

H は平面 ABC 上より

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (s、t は実数)

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+s+t\\-1+s+3t\\-1+3s+t\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp$ 平面ABC より、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より

$$\begin{pmatrix}1+s+t\\-1+s+3t\\-1+3s+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=0$$

$\therefore\ 11s+7t=3$ …………①

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$\begin{pmatrix}1+s+t\\-1+s+3t\\-1+3s+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=0$$

$\therefore\ 7s+11t=3$ …………②

①、② より、$s=t=\dfrac{1}{6}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$ より、$\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{3}、-\dfrac{1}{3}、-\dfrac{1}{3}\right)$ 答

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n}=(a、b、c)$ とすると

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=0$$

$\therefore\ a+b+3c=0$ …………(ⅰ)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=0$$

$\therefore\ a+3b+c=0$ …………(ⅱ)

(ⅰ)、(ⅱ) を満たす a、b、c の 1 つを $(a、b、c)=(-4、1、1)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\vec{n}$ 上への正射影ベクトルより

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\quad\cdots\cdots\cdots\ (※_1)$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}}{(-4)^2+1^2+1^2}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$$

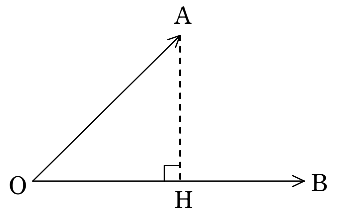
$$=\frac{-6}{18}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

よって、$\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{3}、-\dfrac{1}{3}、-\dfrac{1}{3}\right)$ 答

$※_1$：正射影ベクトル

右図のように点 A から直線 OB に下ろした垂線の足を H とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 上への正射影ベクトルといい



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せる。

(2) $V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH}$ より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11^2-7^2}$$

$$=3\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{3}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

よって、$V=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 答

(3) P は AH 上より、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}k\\k\\2k\end{pmatrix}$ (k は実数) ………③

また、P は直線 BC 上の点でもあるので、BP : PC$=t:1-t$ (t は実数) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\1+2t\\3-2t\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots ④$$

③、④ より、係数比較をして

$$\begin{cases}\dfrac{k}{3}=1\\[2mm]\dfrac{k}{3}=1+2t\\[2mm]\dfrac{2}{3}k=3-2t\end{cases}$$

これらを連立して、$k=\dfrac{1}{3}$、$t=\dfrac{1}{2}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より、AH : HP$=1:2$ 答

(4) (3) より、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

よって、P(2、1、1) である。 答

2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 関係式 $2^a=3$、$3^b=5$、$6^c=10$ が与えられたとき、c を a、b を用いて表せ。

(2) 4 種類の数字 0、1、2、3 を用いて表現された自然数を、次のように小さい方から順に並べる。

2、10、12、20、22、30、32、100、102、110、112、120、122、130、132、200、……

次の問いに答えよ。

(a) 第 1489 項目の数値はいくつか。　(b) 2022 が現れるのは第何項目か。

(3) $n=14^{100}$ とし、n の最高位の数字を a とする。次の各問いに答えよ。なお、必要に応じて下記対数表を用いること。

(a) n の桁数を求めよ。　(b) a の値を求めよ。

(c) $a\times n$ を15 で割った余りを求めよ。

$\log_{10}2=0.3010$、$\log_{10}3=0.4771$、$\log_{10}4=0.602$、$\log_{10}5=0.6990$
$\log_{10}6=0.7782$、$\log_{10}7=0.8451$、$\log_{10}8=0.9031$、$\log_{10}9=0.9542$

解説

(1) 条件より

$$\begin{cases} a=\log_2 3 \cdots\cdots ① \\ b=\log_3 5 \cdots\cdots ② \\ c=\log_6 10 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③より、$c=\dfrac{\log_2 10}{\log_2 6}=\dfrac{\log_2 2+\log_2 5}{\log_2 2+\log_2 3}=\dfrac{1+\log_2 5}{1+a}$　（①より）

②より、$b=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 5}{a}$

$\therefore\ ab=\log_2 5$

よって、$c=\dfrac{1+ab}{1+a}$　答

(2) $2_{(4)}=2$、$10_{(4)}=4$、$12_{(4)}=6$、$20_{(4)}=8$、$22_{(4)}=10$、……

となるので、与えられた数列は、正の偶数を 4 進法に直して並べたものである。

(a) 1489 番目の正の偶数は、$2\times1489=2978$ で

$2978=232202_{(4)}$

となるので、第 1489 番目の数は、232202　答

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2978 \\ 4 & 744 \cdots\cdots 2 \\ 4 & 186 \cdots\cdots 0 \\ 4 & 46 \cdots\cdots 2 \\ 4 & 11 \cdots\cdots 2 \\ & 2 \cdots\cdots 3 \end{array}$$

(b) $2022_{(4)}=2\cdot4^3+2\cdot2^1+2\cdot2^0=138$ で

138 は 69 番目の正の偶数である。

よって、2022 は第 69 項目である。　答

(3)

(a) $\log_{10}n=\log_{10}14^{100}$
$=100\cdot\log_{10}14$
$=100\cdot(\log_{10}2+\log_{10}7)$
$=100\cdot(0.3010+0.8451)$
$=114.61$

よって、$14^{100}=10^{114.61}$
$=10^{114}\times10^{0.61}$

ここで、$10^0<10^{0.61}<10^1$ より $10^{0.61}$ は桁数に影響しないので

桁数に関しては、10^{114} のみを考えればよい。

よって、14^{100} は 115 桁の数である。　答

(b) $\log_{10}4=0.602$　より、$4=10^{0.602}$

$\log_{10}5=0.699$　より、$5=10^{0.699}$

よって、$4=10^{0.602}<10^{0.61}<10^{0.699}=5$ となるので、

14^{100} の最高位の数字は 4 となる。

ゆえに、$a=4$ となる。　答

(c) 以下、$mod\ 15$ とする。

$a\times n=4\times14^{100}$
$\equiv4\times(-1)^{100}$
$=4$

よって、$a\times n$ を 15 で割った余りは 4 である。　答

別解　$14^{100}=\{15+(-1)\}^{100}$
$=\sum_{k=0}^{100}{}_{100}C_k\,15^k\cdot(-1)^{100-k}$
$=(-1)^{100}+{}_{100}C_1\,15\cdot(-1)^{99}+{}_{100}C_2\,15^2\cdot(-1)^{98}+\cdots\cdots+{}_{100}C_{99}15^{99}\cdot(-1)+15^{100}$

$15^{\ell}\times$(整数)($\ell=1$、2、……、100) の部分をまとめて $15M$ とおくと（M は整数）

$14^{100}=15M+1$ となる。

よって、$a\times n=4\times14^{100}$
$=4\times(15M+1)$
$=15\times4M+4$

となるので、$a\times n$ を 15 で割った余りは 4 である。　答

3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　次の各定積分の値を求めよ。

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx、I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx、I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$$

(2)　不等式 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$、$\sin x \leqq y \leqq 1$ を満たす点 $(x、y)$ の存在する範囲を x 軸のまわりに回転してえられる立体の体積を V_1、y 軸のまわりに回転してえられる立体の体積を V_2 とする。V_1、V_2 をそれぞれ求めよ。

解説

(1)　$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'dx$

$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$

$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1$　　答

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx$

$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}-1$　　答

$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin x)'dx$

$=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\,dx$

$=\frac{\pi^2}{4}-2I_1$

$=\frac{\pi^2}{4}-2$　　答

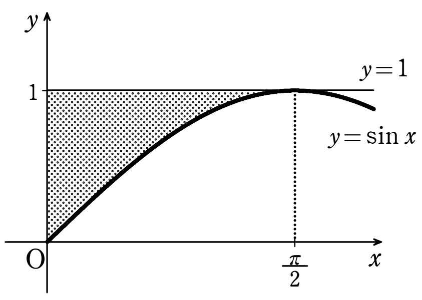
(2)　$V_1=\pi\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx$

$=\frac{\pi^2}{2}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2x}{2}dx$

$=\frac{\pi^2}{2}-\pi\Big[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin4x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi^2}{2}-\left(\frac{\pi^2}{4}-0\right)$

$=\frac{\pi^2}{4}$　　答



また、$V_2=\pi\int_{y=0}^{y=1}x^2dy$ より

$y=\sin x$ と置換すると、$dy=\cos x\,dx$ より

y	$0 \to 1$
x	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$V_2=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$

$=\pi I_3$

$=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$　　答

別解　$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx$ ………（※$_2$）

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx-2\pi\int_0^1 x\sin x\,dx$

$=2\pi\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\pi I_1$

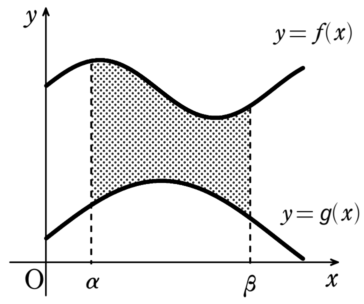
$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi$　　答

※$_2$：バームクーヘン分割

右の図のような打点部分を y 軸まわりに一回転させてできる立体の体積は

$$V=\int_{x=\alpha}^{x=\beta}2\pi x\{f(x)-g(x)\}dx$$

となる。



注意　記述式で使うのは控えたほうが良い。

4 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 1個のサイコロをくり返し振る試行について、次の問いに答えよ。
サイコロは、1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(1−1) 1の目が2回出れば試行を終えることにする。ちょうど5回振って試行を終える確率を求めよ。

(1−2) 1の目が連続して2回出れば試行を終えることにする。ちょうど5回振って試行を 終える確率を求めよ。

(2) ある工場では、作られる製品のうち $p\ (0<p<1)$ の確率で不良品が発生するという。ある程度たくさんの製品が生産された時点で検査を行い、それに合格すれば一斉に出荷する。検査方法として

A : 4個抜き出して検査し、不良品が1個以下なら合格

B : 7個抜き出して検査し、不良品が2個以下なら合格

という2つの方法を考えた。

(2−1) A、Bそれぞれにつき、検査で合格する確率を求めよ。

(2−2) Aの方が合格しやすいのは p の値がどのような範囲のときか。

(解説)

(1) (1−1)

1～4回目に1の目が1回、2～6の目が4回出て、5回目に1の目が出ればよいので求める確率は

$${}_4C_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{125}{1944} \quad 答$$

(1−2) 1の目が出ることを○、1以外の目が出ることを×とすると

(ⅰ) 1 回目に1の目が出て、2、3回目に1以外 の目が出て、 4 、5回目に1の目が出ればよいので、すなわち ○××○○ の場合

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{25}{6^5}$$

(ⅱ) ×○×○○ の場合

$$\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{25}{6^5}$$

(ⅲ) ×××○○ の場合

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{125}{6^5}$$

(ⅰ)～(ⅲ)より、求める確率は

$$\frac{25+25+125}{6^5}=\frac{175}{7776} \quad 答$$

別解 1、2回目に1の目が連続して出ることがなく、3回目に2～6の目が出て 4 、5回目に1の目が出ればよいので、求める確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{175}{7776} \quad 答$$

(2−1) 検査Aで合格するのは、不良品が0、1個のときより、求める確率を P とすると

$$\begin{aligned}P&=(1-p)^4+{}_4C_1\cdot p(1-p)^3=(1-p)^3\{(1-p)+4p\}\\&=(1-p)^3\{(1-p)+4p\}\\&=(1-p)^3(3p+1) \quad 答\end{aligned}$$

検査Bで合格するのは、不良品が0、1、2個のときより、求める確率をQ とすると

$$\begin{aligned}Q&=(1-p)^7+{}_7C_1\cdot p(1-p)^6+{}_7C_2\cdot p^2(1-p)^5\\&=(1-p)^5\{(1-p)^2+7p(1-p)+21p^2\}\\&=(1-p)^5(1+5p+15p^2) \quad 答\end{aligned}$$

(2−2) $P>Q$ より

$$(1-p)^3(3p+1)>(1-p)^5(1+5p+15p^2)$$

$(1-p)^3>0$ より

$$3p+1>(1-p)^2(1+5p+15p^2)$$

$$\therefore\ p^2(15p^2-25p+6)<0$$

$p^2>0$ より

$$15p^2-25p+6<0$$

$$\therefore\ \frac{25-\sqrt{265}}{30}<p<\frac{25+\sqrt{265}}{30}$$

$0<p<1$ より

$$\frac{25-\sqrt{265}}{30}<p<1 \quad 答$$