◇２０２２年　昭和大学医学部 Ⅰ期

1 i は虚数単位、複素数 $z=\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}$ とする。複素数 α は方程式 $2\alpha z^3=(1-t)\alpha+t$ に従う。ただし、t は実数とする。次の $\boxed{}$ に適切な解を入れよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

t の変化によって描かれる複素数 α の図形は、複素数平面上で $\boxed{(1)}$ を中心とする半径 $\boxed{(2)}$ の円である。ただし、点 $\boxed{(3)}$ を除く。次に、方程式 $\beta=\dfrac{z^6}{\alpha}$ を満たす点 β 全体を考える。β が描く図形と実軸の交点を γ とすると、$\gamma=\boxed{(4)}$ である。

また、偏角 $\theta=arg\left(1-\dfrac{z^6}{\gamma}\right)=\boxed{(5)}$ である。ただし、$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

解説

(1)～(3)　$2\alpha z^3=(1-t)\alpha+t$ より

$(1-\alpha)t=2\alpha z^3-\alpha$ ………①

① で $\alpha=1$ とすると、$0=2z^3-1$ より、$z^3=\dfrac{1}{2}$ となるが

$$z=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9} \text{ より}$$

$$z^3=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ………②}$$

となり、不適。

よって、$\alpha\fallingdotseq 1$ として、① より

$$t=\frac{2\alpha z^3-\alpha}{1-\alpha}$$

② より、$t=\dfrac{2\alpha\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\alpha}{1-\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}\,\alpha i}{1-\alpha}$

t は実数より、$t=\overline{t}$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{3}\,\alpha i}{1-\alpha}=-\frac{\sqrt{3}\,\overline{\alpha}i}{1-\overline{\alpha}}$$

$$\therefore\quad \frac{\alpha}{1-\alpha}=-\frac{\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}}$$

$$\therefore\quad \alpha(1-\overline{\alpha})=-\overline{\alpha}(1-\alpha)$$

$$\therefore\quad 2\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha}=0$$

$$\therefore\quad \alpha\overline{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\overline{\alpha}=0$$

$$\therefore\quad \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \left|\alpha-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \text{ ………③}$$

よって、点 α は点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とした半径 $\dfrac{1}{2}$ の円上を動く。

ただし、点 1 を除く。　答

(4)、(5)　$\beta=\dfrac{z^6}{\alpha}$ より、$\alpha\beta=z^6$ ………④

④ で $\beta=0$ とすると、$z^6=0$ となるが

$$z=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9} \text{ より}$$

$$z^6=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ………⑤}$$

となり、不適。

よって、$\beta\fallingdotseq 0$ として、④ より $\alpha=\dfrac{z^6}{\beta}$

③ に代入すると

$$\left|\frac{z^6}{\beta}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad |2z^6-\beta|=|\beta|$$

$$\therefore\quad |\beta-2z^6|=|\beta| \text{ ………⑥}$$

よって、β が描く図形は、原点と点 $2z^6=-1+\sqrt{3}\,i$ (⑤ より) を結ぶ線分の垂直二等分線である。⑥ と実軸の交点が点 γ より、$\beta=\gamma$ を代入して

$$|\gamma-(-1+\sqrt{3}\,i)|=|\gamma|$$

$$\therefore\quad |(\gamma+1)-\sqrt{3}\,i|=|\gamma|$$

γ は実数より

$$(\gamma+1)^2+3=\gamma^2$$

$$\therefore\quad 2\gamma+4=0$$

$$\therefore\quad \gamma=-2$$

このとき、$1-\dfrac{z^6}{\gamma}=1-\dfrac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{-2}$

$$=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって、$\theta=arg\left(1-\dfrac{z^6}{\gamma}\right)=\dfrac{\pi}{6}$　答

別解　⑥ の続きから

β は原点と点 $2z^6=-1+\sqrt{3}\,i$ (⑤ より) を結ぶ線分の垂直二等分線である。

ここで、xy 平面に直すと

原点と点 $(-1、\sqrt{3})$ を結ぶ直線の傾きは、$-\dfrac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$ より

垂直二等分線の式は、$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ………⑦

x 軸との交点は、$0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\quad x=-2$$

よって、$\gamma=-2$

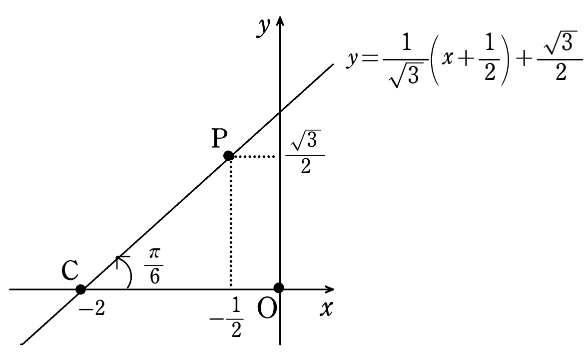
また、$1-\dfrac{z^6}{\gamma}=\dfrac{\gamma-z^6}{\gamma}$

$$=\frac{z^6-\gamma}{0-\gamma}$$

$$=\frac{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)-(-2)}{0-(-2)}$$

これより、C を$(-2、0)$、P を$\left(-\dfrac{1}{2}、\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると、

図より、$\theta=\angle\mathrm{OCP}$ となるので、$\theta=arg\left(1-\dfrac{z^6}{\gamma}\right)=\dfrac{\pi}{6}$　答



2 $\triangle$OABにおいて、$\mathrm{OA}=2$、$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$、$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ とし、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\triangle$OABの垂心Hについて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 線分OHを延長し線分ABとの交点をDとする。

(a) 線分ADの長さ ℓ_1 を求めよ。 (b) 線分ODの長さ ℓ_2 を求めよ。

(4) $\triangle$OABの外接円の半径 R を求めよ。

(5) $\triangle$OABの外心Gについて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(解説)

(1) $\triangle$OABで余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$\therefore\ 3=4+5-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3$ 　答

別解 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$\therefore\ 3=5-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3$ 　答

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$、$t$ は実数）とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$より

$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$\therefore\ (\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2)s-(|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b})t=0$

$\therefore\ -s+2t=0$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\ (s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$\therefore\ 3(s-1)+5t=0$

$\therefore\ 3s+5t=3$ ………②

①、②を連立して

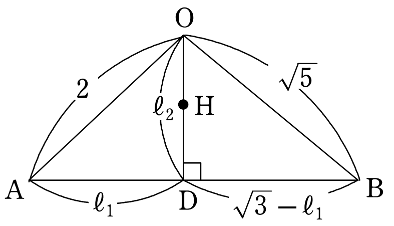
$s=\dfrac{3}{11}$、$t=\dfrac{6}{11}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{6}{11}\vec{a}+\dfrac{3}{11}\vec{b}$ 　答

(3) $\triangle$OADと$\triangle$OBDで三平方の定理より

$$\begin{cases}\ell_1{}^2+\ell_2{}^2=4\\(\sqrt{3}-\ell_1)^2+\ell_2{}^2=5\end{cases}$$

連立して、$\ell_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$、$\ell_2=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ 　答



別解 $\triangle$OABで余弦定理より

$\mathrm{OB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos\angle\mathrm{OAB}$

$\therefore\ 5=4+3-2\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\angle\mathrm{OAB}$

$\therefore\ \cos\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

よって、$\ell_1=\mathrm{OA}\cdot\cos\angle\mathrm{OAB}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 　答

$\ell_2=\mathrm{OA}\cdot\sin\angle\mathrm{OAB}=2\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{33}}{6}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ 　答

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}\ (k>0)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{6k}{11}\vec{a}+\dfrac{3k}{11}\vec{b}$

A、B、Dは同一直線上より

$\dfrac{6k}{11}+\dfrac{3k}{11}=1$

$\therefore\ k=\dfrac{11}{9}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}$

これより、Dは線分ABを1 : 2に内分する点より

$\ell_1=\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 　答

また、$\triangle$OADで三平方の定理より

$\ell_2=\sqrt{4-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ 　答

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}$ より

$3=2\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}$

$\therefore\ \cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

よって、$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$

ゆえに、正弦定理より

$2R=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AOB}}$

$\therefore\ R=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{165}}{11}$ 　答

参考 (2)の別解の1つ目を利用してもよい

正弦定理より、$2R=\dfrac{\mathrm{OB}}{\sin\angle\mathrm{OAB}}$

よって、$R=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{33}}{6}}=\dfrac{\sqrt{165}}{11}$ 　答

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=p\vec{a}+q\vec{b}$（$p$、$q$ は実数）、OAの中点をM、OBの中点をNとすると

$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ、$\overrightarrow{\mathrm{GN}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ かつ、$\overrightarrow{\mathrm{GN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より

$(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$\therefore\ \left\{\dfrac{1}{2}\vec{a}-(p\vec{a}+q\vec{b})\right\}\cdot\vec{a}=0$

$\therefore\ \left(\dfrac{1}{2}-p\right)|\vec{a}|^2-q\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\ 4p+3q=2$ ………③

$\overrightarrow{\mathrm{GN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$\therefore\ \left\{\dfrac{1}{2}\vec{b}-(p\vec{a}+q\vec{b})\right\}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\ -p\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\dfrac{1}{2}-q\right)|\vec{b}|^2=0$

$\therefore\ 6p+10q=5$ ………④

③、④を連立して

$p=\dfrac{5}{22}$、$q=\dfrac{4}{11}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{5}{22}\vec{a}+\dfrac{4}{11}\vec{b}$ 　答

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=p\vec{a}+q\vec{b}$（$p$、$q$ は実数）、OAの中点をM、OBの中点をNとすると

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\angle\mathrm{GOA}$ ………（※）

$=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$

よって、$(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot\vec{a}=2$

$\therefore\ p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\therefore\ 4p+3q=2$ ………③

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{GOB}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\dfrac{5}{2}$

よって、$(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot\vec{b}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ p\vec{a}\cdot\vec{b}+q|\vec{b}|^2=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ 6p+10q=5$ ………④

③、④を連立して

$p=\dfrac{5}{22}$、$q=\dfrac{4}{11}$

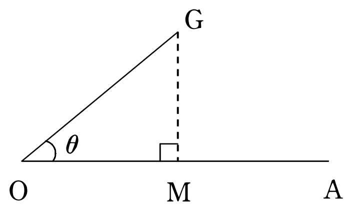
よって、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{5}{22}\vec{a}+\dfrac{4}{11}\vec{b}$　　　答

※：右図より

$\mathrm{OG}\cdot\cos\theta=\mathrm{OM}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$



3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) xy 平面上で動点P、Q はそれぞれ点 $(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$ を同時に出発し、P は y 軸上の正の向きに 1 の速さで、Q は$x^2+y^2=1$ の周上を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{2}$ の速さ (角速度) で動くものとする。P、Q が点 $(0,\ 1)$ に近づくとき、直線 PQ と直線 $x=-1$ との交点を R とする。

(1−1)　P の座標を$(0,\ t)$ $(0\leqq t<1)$ とおくとき、Q、R の座標を t を用いて表せ。

(1−2)　R はどのような点に近づくか。

(2)　$I_n=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$ について、次の問いに答えよ。ただし、n は正の整数とする。

(2−1)　I_1 を求めよ。

(2−2)　I_n とI_{n+2} との間に成り立つ関係を求めよ。

(2−3)　I_5 を求めよ。

解説

(1)

(1−1)　P の座標が $(0,\ t)$ のとき、Q は角度 $\dfrac{\pi}{2}t$ だけ進んでいるので

Q の座標は$\left(\cos\dfrac{\pi}{2}t,\ \sin\dfrac{\pi}{2}t\right)$ となる。　答

また、R を$(-1,\ r)$ とおくと、

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}t,\ \sin\dfrac{\pi}{2}t-t\right)$、$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-1,\ r-t)$となり、

P、Q、R は同一直線上より

$$\cos\frac{\pi}{2}t\times(r-t)-\left(\sin\frac{\pi}{2}t-t\right)\times(-1)=0$$

$$\therefore\quad (r-t)\cdot\cos\frac{\pi}{2}t=t-\sin\frac{\pi}{2}t$$

$0\leqq t<1$ より $\cos\dfrac{\pi}{2}t\neq 0$

よって、$r=t+\dfrac{t-\sin\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}t}$

ゆえに、R の座標は$\left(-1,\ t+\dfrac{t-\sin\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}t}\right)$　答

(1−2)　P、Q が $(0,\ 1)$ に近づくとき、$t\to 1-0$となるので

$$\lim_{t\to1-0}r=\lim_{t\to1-0}\left(t+\frac{t-\sin\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}t}\right)$$

$1-t=\theta$ とおくと、$t\to1-0$ のとき、$\theta\to+0$

$$\lim_{t\to1-0}r=\lim_{\theta\to+0}\left\{1-\theta+\frac{1-\theta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\theta\right)}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{1-\theta+\frac{1-\theta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\theta\right)}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(1-\theta+\frac{1-\theta+\cos\frac{\pi}{2}\theta}{\sin\frac{\pi}{2}\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(1-\theta+\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}\theta}{\sin\frac{\pi}{2}\theta}-\frac{\theta}{\sin\frac{\pi}{2}\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{1-\theta+\frac{1-\cos^2\frac{\pi}{2}\theta}{\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\theta\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2}\theta}-\frac{\frac{\pi}{2}\theta}{\sin\frac{\pi}{2}\theta}\times\frac{2}{\pi}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{1-\theta+\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}\theta}{\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\theta\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2}\theta}-\frac{\frac{\pi}{2}\theta}{\sin\frac{\pi}{2}\theta}\times\frac{2}{\pi}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(1-\theta+\frac{\sin\frac{\pi}{2}\theta}{1+\cos\frac{\pi}{2}\theta}-\frac{\frac{\pi}{2}\theta}{\sin\frac{\pi}{2}\theta}\times\frac{2}{\pi}\right)$$

$$=1-0+\frac{0}{1+1}-1\times\frac{2}{\pi}$$

$$=1-\frac{2}{\pi}$$

よって、R は$\left(-1,\ 1-\dfrac{2}{\pi}\right)$ に近づく。　答

(2)

(2−1)　$I_1=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

これは、原点を中心とする半径 1 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すので

$$I_1=\pi\cdot1^2\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}\quad 答$$

(2−2)　$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}dx$

$$=\int_0^1 x'\cdot(1-x^2)^{\frac{n}{2}+1}dx$$

$$=\left[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}+1}\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot(-2x)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$$

$$=(n+2)\int_0^1 x^2\cdot(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$$

$$=-(n+2)\int_0^1\{(1-x^2)-1\}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$$

$$=-(n+2)\int_0^1\left\{(1-x^2)^{\frac{n}{2}+1}-(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\right\}dx$$

$$=-(n+2)\left\{\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}+1}dx-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx\right\}$$

$$=-(n+2)(I_{n+2}-I_n)$$

よって、$(n+3)I_{n+2}=(n+2)I_n$

$$\therefore\quad I_{n+2}=\frac{n+2}{n+3}I_n\quad 答$$

別解　$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}dx$

$x=\sin\theta$ とおくと、$dx=\cos\theta\,d\theta$で x が $0\to1$ のとき、θ は $0\to\dfrac{\pi}{2}$ より

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+3}\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)'\cdot\cos^{n+2}\theta\,d\theta$$

$$=\left[\sin\theta\cdot\cos^{n+2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+2)\cdot(\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)\cdot\cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

$$=(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

$$=(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\cdot\cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

$$=(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{n+1}\theta-\cos^{n+3}\theta)d\theta$$

$$=(n+2)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+3}\theta\,d\theta\right\}$$

$$=(n+2)(I_n-I_{n+2})$$

よって、$(n+3)I_{n+2}=(n+2)I_n$

$$\therefore\quad I_{n+2}=\frac{n+2}{n+3}I_n\quad 答$$

(2−3)　(2−2) より

$$I_5=\frac{5}{6}I_3$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_1$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{5}{32}\pi\quad 答$$

4 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) SHOWAという語の5文字すべてを並べてできる順列について、順列の総数を求めよ。

(2) HTTPSSHOWAという語の10文字すべてを並べてできる順列について、次の問いに答えよ。

(2－1) 順列の総数を求めよ。

(2－2) SSという並びとTTという並びをともに含む順列は全部でいくつあるか。

(2－3) SHSHという並びを含まない順列は全部でいくつあるか。

(2－4) STという並びまたはTSという並びの少なくとも一方を含む順列は全部でいくつあるか。

解説

(1) SHOWAの5文字の並べ方の総数は、$5!=120$ 通り　答

(2)

(2－1) HTTPSSHOWAの10文字の並べ方の総数

$$\frac{10!}{2!\cdot2!\cdot2!}=453600 \text{ 通り}$$　答

(2－2) SSとTTの並びをとも含む並べ方の総数は

SSを1組、TTを1組として、$\boxed{\text{SS}}$ $\boxed{\text{TT}}$ HPHOWAの並べ方の総数と同じより

$$\frac{8!}{2!}=20160 \text{ 通り}$$　答

(2－3) SHSHの並びを含む並べ方の総数は

SHSHを1組として、$\boxed{\text{SHSH}}$ TT POWAの並べ方の総数と同じより

$$\frac{7!}{2!}=2520 \text{ 通り}$$

よって、SHSHの並びを含まない並べ方の総数は

$$453600-2520=451080 \text{ 通り}$$　答

(2－4) SとTが隣り合わない並べ方の総数は

SとT以外の並びの間または両端にS、S、T、Tを入れた並べ方の総数と同じである。ただし、S同士、T同士は隣り合ってもよい。

SとT以外の並べ方の総数は

$$\frac{6!}{2!}=360 \text{ 通り}$$

○：SとT以外が並ぶ
∧：SとTが入る候補
∧○∧○∧○∧○∧○∧○∧

よって、S、S、T、T の並べ方は

(ⅰ) SSを1組、TTを1組として入れるとき

$${}_7P_2=42 \text{ 通り}$$

(ⅱ) SSを1組として、Tは別々に入れるとき

$$\frac{{}_7P_3}{2!}=105 \text{ 通り}$$

(ⅲ) TTを1組として、Sは別々に入れるとき

$$\frac{{}_7P_3}{2!}=105 \text{ 通り}$$

(ⅳ) S、Tともに別々に入れるとき

$$\frac{{}_7P_4}{2!2!}=210 \text{ 通り}$$

(ⅰ)～(ⅳ)より、SとTが隣り合わない並べ方の総数は

$$360\times(42+105+195+210)=166320 \text{ 通り}$$

よって、STという並びまたはTSという並びの少なくとも一方を含む並べ方の総数はは

$$453600-166320=287280 \text{ 通り}$$　答