1 次の問い（問 1、2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　$-\pi<\theta<\pi$、$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ とする。z を $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ の形で表すと、

$$r=\boxed{1}\cos\frac{\theta}{\boxed{2}}\text{、}\alpha=\frac{\theta}{\boxed{3}}$$

である。ただし、$r>0$、$-\pi<\alpha<\pi$ とする。また、z^{32} が純虚数となるような θ の値は $\boxed{4}\boxed{5}$ 個ある。

問 2　三角形 ABC において、辺 AB を $1:a$ に内分する点を E、辺 BC を $1:b$ に内分する点を D とする。ただし、$a>0$、$b>0$ とする。線分 AD と CE の交点を P とする。このとき、

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{\boxed{6}+b}{ab}$$

である。また、$a+b=5$ のときに△APE : △ABC＝1 : 30 となるのは、$a=\boxed{7}$、$b=\boxed{8}$ または、$a=\boxed{9}$、$b=\boxed{10}$ のときである。ただし、$\boxed{7}<\boxed{9}$ とする。

（解説）

問 1　$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$

$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$-\pi<\theta<\pi$ より、$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって、$2\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ となるので、$r=2\cos\dfrac{\theta}{2}$　答

$-\pi<\alpha<\pi$ より、$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$　答

また、$z^{32}=\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^{32}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^{32}$

$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{32}(\cos 16\theta+i\sin 16\theta)$$

これが純虚数となる条件は

$$\cos 160\theta=0$$

$$\therefore\ 16\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

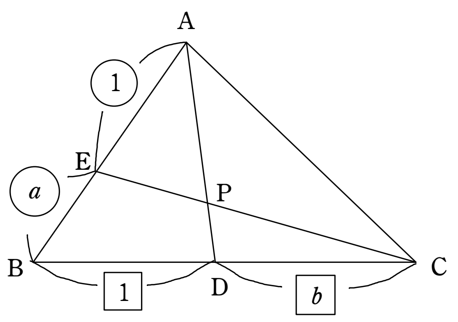
$-\pi<\theta<\pi$ より、$-16\pi<16\theta<16\pi$

$$\therefore\ -16\pi<\frac{\pi}{2}+n\pi<16\pi$$

$$\therefore\ -\frac{33}{2}<n<\frac{31}{2}$$

n は整数より、$n=-16$、-15、………、14、15 より、θ の個数は 32 個　答

問 2



メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=1$$

$$\therefore\ \frac{1+b}{b}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{1}{a}=1$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{1+b}{ab}$$　答

よって、AP : PD＝$1+b$: ab

△ABC の面積を T、△APE の面積を S とすると

△ABC : △ABD＝$1+b$: 1

$$\therefore\ \triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{1+b}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{T}{1+b}$$

△APE : △ABD＝AE・AP : AB・AD

$$\therefore\ S:\frac{T}{1+b}=1+b:(1+a)\cdot(1+b+ab)$$

$$\therefore\ (1+a)\cdot(1+b+ab)S=T$$

$T=30S$ より

$$(1+a)\cdot(1+b+ab)=30$$

$a+b=5$ より、$b=5-a$ を代入して

$$(1+a)\{1+(5-a)+a(5-a)\}=30$$

$$\therefore\ (1+a)(-a^2+4a+6)=30$$

$$\therefore\ a^3-3a^2-10a+24=0$$

$$\therefore\ (a-2)(a-4)(a+3)=0$$

$a>0$ より、$a=2$、4

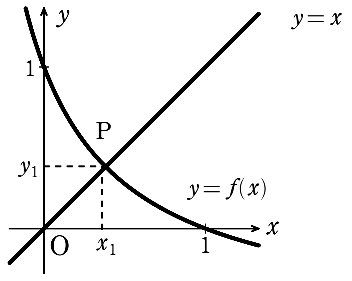
$a+b=5$ より、$(a,\ b)=(2,\ 3)$、$(4,\ 1)$　答

2 次の文章を読み、下の問い（問 1、2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

a は正の定数とする。関数

$$f(x)=\frac{1}{x+a}-a$$

は $x>-a$ を定義域とし、$f(1)=0$ が成り立つものとする。



問 1　$y=f(x)$ のグラフを F とする。F は、$x>0$ における $y=\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸の方向に $\boxed{あ}$、y 軸の方向に $\boxed{い}$ 平行移動して得られる。

(1)　$\boxed{あ}$、$\boxed{い}$ に入る組合せとして最も適切なものを、次の ① ～ ⑧ のうちから一つ選べ。$\boxed{11}$

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
あ	a	a	$-a$	$-a$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
い	a	$-a$	a	$-a$	a	$-a$	a	$-a$

(2)　$a=\frac{1}{2}\left(\boxed{12}\,\boxed{13}+\sqrt{\boxed{14}}\right)$ である。

(3)　F と直線 $y=x$ の交点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると、$f'(x_1)=\boxed{15}\,\boxed{16}$ である。

(4)　F と座標軸に囲まれる領域（ただし境界を含む。）を A とする。A に含まれる円のうち、半径が最大のものを考える。この円の中心の x 座標は x_1 を用いて $\left(\boxed{17}-\sqrt{\boxed{18}}\right)x_1$ と表せる。

問 2　A のうち、$y\leqq x$ を満たす領域の面積は

$$\log\left(\frac{\boxed{19}+\sqrt{\boxed{20}}}{2}\right)+\frac{\boxed{21}-\sqrt{\boxed{22}}}{4}$$

（解説）

(1)　$f(x)=\frac{1}{x-(-a)}-a$ より

$y=f(x)$ は、$y=\frac{1}{x}$ を x 軸方向に$-a$、y 軸方向に a 平行移動したグラフである。

（⇒④）　答

(2)　$f(1)=0$ より

$$\frac{1}{1+a}-a=0$$

$$\therefore\quad 1-a(1+a)=0$$

$$\therefore\quad a^2+a-1=0$$

$a>0$ より、$a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$　答

(3)　$y=f(x)$ と $y=x$ の交点の x 座標より

$$\frac{1}{x+a}-a=x$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x+a}=x+a$$

$$\therefore\quad (x+a)^2=1$$

$$\therefore\quad x+a=\pm1$$

$$\therefore\quad x=\pm1-a$$

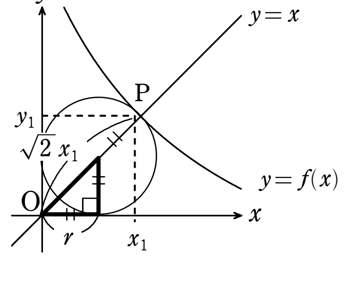
$x>-a$ より、$x=1-a$

よって、$x_1=1-a$ より

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+a)^1}$$

となるので、$f'(x_1)=-\frac{1}{(x_1+a)^2}=-\frac{1}{(1-a+a)^2}=-1$　答

(4)　円の半径が最大となるのは下図 のようなときである。



円の半径を r とすると、図の直角二等辺三角形より

$$1:\sqrt{2}=r:\sqrt{2}\,x_1-r$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\,r=\sqrt{2}\,x_1-r$$

$$\therefore\quad (1+\sqrt{2})r=\sqrt{2}\,x_1$$

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}x_1=(2-\sqrt{2})x_1$$

中心の x 座標と半径 r は一致するので、円の中心の x 座標は、$(2-\sqrt{2})x_1$　答

別解　円の半径を r とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix}+\frac{r}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

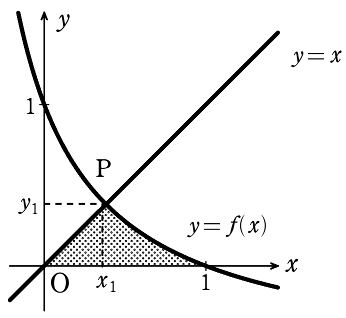
$$\therefore\quad x_1=r+\frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\,x_1=(\sqrt{2}+1)r$$

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}x_1=(2-\sqrt{2})x_1$$

中心の x 座標と半径 r は一致するので、円の中心の x 座標は、$(2-\sqrt{2})x_1$　答

問 2　求める面積は下の図の打点部分である。



$y=f(x)$ が $y=x$ に関して対称より、求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1\left(\frac{1}{x+a}-a\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(x+a)-ax\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\{\log(1+a)-a-\log a\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a}-\frac{1}{2}a$$

$a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ より

$$S=\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})+1}{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$=\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$　答

別解　対称性を利用しないと

$$S=\frac{1}{2}{x_1}^2+\int_{x_1}^1\left(\frac{1}{x+a}-a\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}{x_1}^2+\Big[\log(x+a)-ax\Big]_{x_1}^1$$

$$=\frac{1}{2}{x_1}^2+\log(1+a)-a-\log(x_1+a)+ax_1$$

$x_1=1-a$ より

$$S=\frac{1}{2}(1-a)^2+\log(1+a)-a+a(1-a)$$

$$=\log(1+a)-\frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$$

$a^2=1-a$ より

$$S=\log(a+1)-\frac{1}{2}(1-a)^2-a+\frac{1}{2}$$

$$=\log(a+1)-\frac{1}{2}a$$

$a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ より

$$S=\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$　答

3 次の文章を読み，下の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

n を 1 以上の整数とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=\frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n+6)$$

で与えられるとする。

問 1　$a_1=\boxed{23}$，$a_2=\boxed{24}$ である。

問 2　$a_n=462$ となるのは $n=\boxed{25}\boxed{26}$ のときである。

問 3　$Q_n=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$ とするとき，

$$Q_n=\frac{\boxed{27}\,n+\boxed{28}}{\boxed{29}\,(n+1)}$$

である。

（解説）

問 1　$a_1=S_1$

$$=\frac{1}{3}(1+3+2+6)$$

$$=4 \quad \text{答}$$

$a_1+a_2=S_2$　より

$$a_2=S_2-a_1$$

$$=\frac{1}{3}(8+12+4+6)-4$$

$$=6 \quad \text{答}$$

問 2　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n+6)-\frac{1}{3}\{(n-1)^3+2(n-1)^2+2(n-1)+6\}$$

$$=n(n+1)$$

$n=1$ とすると，$1\cdot 2\neq a_1$ より

$$a_n=\begin{cases} n(n+1) & (n\geqq 2)\\ 4 & (n=1)\end{cases}$$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=462$ とすると

$$n(n+1)=462$$

$$\therefore\quad n^2-n-462=0$$

$$\therefore\quad (n-21)(n+22)=0$$

$n\geqq 2$ であるから　$n=21$　答

問 3　$a_1=2$ から　$Q_1=1+\frac{1}{a_1}$

$$=1+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{5}{4}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$Q_n=1+\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}$$

$$=1+\frac{1}{4}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\frac{5}{4}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{5}{4}+\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{7n+3}{4(n+1)}$$

$n=1$ とすると，$\frac{7+3}{4\cdot 2}=\frac{5}{4}$ となるので，$n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，$Q_n=\frac{7n+3}{4(n+1)}$　答

4 感染症の拡がりについて，次のような仮定をもとに考察する。

ある集団を感染者と非感染者に分け，感染者の人数を I，非感染者の人数を S とする。非感染者の中には，過去に感染して回復した人がおり，その人は再び感染することはないとする。

接種により確率 q で感染しなくなるワクチンがある。非感染者のうち過去に感染した人の割合が p_0 とし，それ以外の非感染者でこのワクチン接種を受けた人の割合を v とする。また，過去に感染しておらず，ワクチン接種も受けていない人は，全て同様に感染しうると仮定する。このとき，$p=(1-p_0)qv+p_0$ は S 人の非感染者から無作為に選んだ 1 人が感染する可能性のない人である確率となる。$(1-p)S$ は感染の可能性がある人の人数として期待される値となる。

感染者数 I の 1 日当たりの増加数は次の式で与えられると仮定する。

$$D=a(1-p)SI-bI \qquad (1)$$

ここで，a と b は正の定数である。式 (1) の右辺の第 1 項は，感染の可能性がある非感染者と感染者が接触することにより感染者が増えることを表し，第 2 項は感染者が回復するか亡くなることにより減少することを表す。感染者の人数 I が減少する条件は $D<0$ で与えられる。

問 1　$q=\frac{9}{10}$，$v=\frac{3}{5}$，$p_0=\frac{1}{5}$ のとき，S 人の非感染者から無作為に 1 人選んだときに，その人が感染する可能性のない人だったとする。その人が過去に感染しておらずかつ，ワクチン接種を受けた人である確率は $\frac{\boxed{30}\boxed{31}}{\boxed{32}\boxed{33}}$ である。

問 2　接種により確率 $q=\frac{9}{10}$ で感染しなくなるワクチンがある。はじめ集団内に，感染して回復した人がおらず $(p_0=0)$，感染者も 1 人もいない状態で，一部の人にワクチン接種をする。接種が終わった後，集団に 1 人の感染者が加わるとする。

$I=1$，$\frac{aS}{b}=\frac{12}{5}$ のとき，感染を拡大させずに縮小させるためには，ワクチン接種を受ける人の割合を $v>\frac{\boxed{34}\boxed{35}}{\boxed{36}\boxed{37}}$ とすればよい。

（解説）

問 1　「S 人の非感染者から無作為に 1 人選んだとき，その人が感染する可能性のない人である」という事象を A，「S 人の非感染者から無作為に 1 人選んだときに，その人が過去に感染しておらず，かつワクチン接種を受けた人である」という事象を B とすると，求める確率を $P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{(1-p_0)qv}{(1-p_0)qv+p_0}$$

$q=\frac{9}{10}$，$v=\frac{3}{5}$，$p_0=\frac{1}{5}$ より

$$P_A(B)=\frac{\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{3}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{5}}=\frac{54}{79} \quad \text{答}$$

問 2　$p_0=0$，$v=\frac{9}{10}$ のとき，$p=(1-p_0)qv+p_0$ より

$$p=(1-0)\cdot\frac{9}{10}\cdot v+0$$

$$\therefore\quad p=\frac{9}{10}v$$

よって，$D=a(1-p)SI-bI<0$ となるのは，$I=1$，$\frac{aS}{b}=\frac{12}{5}$ より

$$a\left(1-\frac{9}{10}v\right)S\cdot 1-b\cdot 1<0$$

$b>0$ より　$\frac{aS}{b}\left(1-\frac{9}{10}v\right)-1<0$

$$\therefore\quad \frac{12}{5}\left(1-\frac{9}{10v}\right)<1$$

$$\therefore\quad 1-\frac{9}{10}v<\frac{5}{12}$$

$$\therefore\quad \frac{9}{10}v>\frac{7}{12}$$

$$\therefore\quad v>\frac{35}{54} \quad \text{答}$$