1 次の問い（問1、2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問１　３次方程式 $ax^3+(-4a+1)x^2+(a+1)x+6a=0$ が３つの異なる実数解をもち、そのうちの２つの絶対値が等しいとき、$a=\dfrac{\boxed{1}\boxed{2}}{\boxed{3}}$ であり、解は、$\pm\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ である。

問２　２つの関数 $f(x)$、$g(x)$ が

$$f(x)=3x^2+2x-\int_0^3 g(t)dt$$

$$g(x)=x^2-6x+\int_1^2 f(t)dt$$

をみたすなら、

$$\int_1^2 f(x)dx=\boxed{6}$$

$$\int_0^3 g(x)dx=\boxed{7}$$

である。

2 次の文章を読み、下の問い（問１〜３）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$x>0$ を定義域とする曲線 $y=f(x)$ 上の、点 $(x、y)$ における接線の傾きが $\dfrac{\log x}{x}$ であり、$f(1)=\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。

問１　$y=f(x)$ と $y=1$ との２つの交点の x 座標をそれぞれ α、β、$\alpha=e^{\boxed{8}\boxed{9}}$、$\beta=e^{\boxed{10}}$ である。ただし、$\alpha<\beta$ とする。

問２　$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=\boxed{11}\,e+\frac{\boxed{12}\boxed{13}}{e}$ である。

問３　$y=f(x)$ の接線のうち、y 軸との交点が $(0、2)$ であるものの方程式は

$$y=\boxed{14}\boxed{15}\,ex+\boxed{16}$$

と

$$y=\frac{\boxed{17}}{e^3}x+\boxed{18}$$

である。

---

1 解説

問１　$ax^3+(-4a+1)x^2+(a+1)x+6a=0$ ………①が異なる３つの実数解をもつので、$a\neq 0$

①より

$(x+1)\{ax^2+(-5a+1)x+6a\}=0$

$\therefore\ x=-1$、$ax^2+(-5a+1)x+6a=0$ ………②

①の異なる３つの実数解のうち、２つの絶対値が等しくなるのは以下のときである。

（ｉ）②が $x=1$ を解にもつとき

②に $x=1$ を代入して

$2a+1=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

このとき、②より

$-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x+-3=0$

$\therefore\ x^2-7x+6=0$

$\therefore\ (x-1)(x-6)=0$

$\therefore\ x=1、6$

よって、①は３つの異なる実数解をもち、そのうち２つの絶対値が等しい。

（ⅱ）②が $x=\pm t\ (t>0)$ を解にもつとき

解と係数の関係より

$t\cdot(-t)=\dfrac{6a}{a}=6$

$\therefore\ -t^2=6$

よって、実数解をもたないので不適

（ｉ）、（ⅱ）から

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき、①の解は $x=\pm 1、6$　答

問２

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+2x-\displaystyle\int_0^3 g(t)dt \\ g(x)=x^2-6x+\displaystyle\int_1^2 f(t)dt \end{cases}$$

$\displaystyle\int_0^3 g(t)dt=p$、$\displaystyle\int_1^2 f(t)dt=q$ とおくと

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+2x-p \\ g(x)=x^2-6x+q \end{cases}$$

$\displaystyle p=\int_0^3 g(t)dt$

$\displaystyle =\int_0^3 (t^2-6t+q)dt$

$\displaystyle =\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+qt\right]_0^3$

$=9-27+3q$

$\therefore\ p-3q=-18$ ………①

また、$\displaystyle q=\int_1^2 f(t)dt$

$\displaystyle =\int_1^2 (3t^2+2t-p)dt$

$\displaystyle =\Big[t^3+t^2-pt\Big]_1^2$

$=(8-1)+4-1-p(2-1)$

$\therefore\ q=10-p$ ………②

①、②より $(p、q)=(3、7)$

よって、$\displaystyle\int_1^2 f(t)dt=7$、$\displaystyle\int_0^3 g(t)dt=3$　答

2 解説

問１

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{\log x}{x} & \text{………①} \\ f(1)=\dfrac{1}{2} & \text{………②} \end{cases}$$

①より、$\displaystyle f(x)=\int f'(x)dx$

$\displaystyle =\int\frac{\log x}{x}dx$

$\displaystyle =\int(\log x)(\log x)'dx$

$=\dfrac{1}{2}(\log x)^2+C$　　（C は積分定数）

②より、$f(1)=C=\dfrac{1}{2}$

よって、$f(x)=\dfrac{1}{2}(\log x)^2+\dfrac{1}{2}$

$y=f(x)$ と $y=1$ との２つの交点の x 座標がそれぞれ α、β より

$\dfrac{1}{2}(\log x)^2+\dfrac{1}{2}=1$

$\therefore\ (\log x)^2=1$

$\therefore\ \log x=\pm 1$

$\therefore\ x=e、\dfrac{1}{e}$

よって、$\alpha=e^{-1}$、$\beta=e^1$　答

問２　$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\{(\log x)^2+1\}dx$

ここで、$\displaystyle\int(\log x)^2dx=\int x'(\log x)^2dx$

$\displaystyle =x(\log x)^2-\int x\cdot\frac{2}{x}(\log x)dx$

$\displaystyle =x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$

$=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C$　より

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\{(\log x)^2+1\}dx=\frac{1}{2}\Big[x(\log x)^2-2(x\log x-x)+x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$\displaystyle =\frac{1}{2}\Big[x(\log x)^2-2x\log x+3x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$\displaystyle =\frac{1}{2}\left[\{e\cdot(1)^2-2e\cdot 1+3e\}-\left\{\frac{1}{e}(-1)^2-2\cdot\frac{1}{e}\cdot(-1)+3\cdot\frac{1}{e}\right\}\right]$

$=e+\dfrac{-3}{e}$　答

問３　接点を $\left(t、\dfrac{1}{2}(\log t)^2+\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

接線は、$y=\dfrac{\log t}{t}(x-t)+\dfrac{1}{2}(\log t)^2+\dfrac{1}{2}$ ………③　となる。

これが、$(0、2)$ を通るので

$2=\dfrac{\log t}{t}\cdot(-t)+\dfrac{1}{2}(\log t)^2+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ (\log t)^2-2\log t-3=0$

$\therefore\ (\log t+1)(\log t-3)=0$

$\therefore\ \log t=-1、3$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{e}、e^3$

よって、③より

$y=-1\cdot ex+2$、$y=\dfrac{3}{e^3}x+2$　答

3 次の文章を読み、下の問い（問1～3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

図1のよう平行な壁に囲まれた直角に曲がる道路を、長さが ℓ の細い棒を水平に保ったまま図1の下方から進んで角を曲がり、右方向に運びたい。運ぶことができる ℓ の最大値を求めるため、準備として次のような問題（問1、2）を考えた。

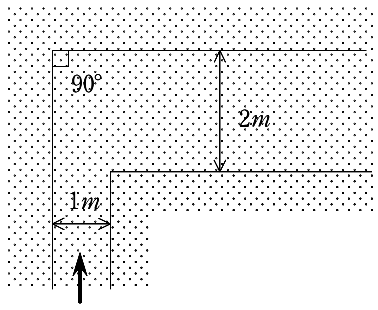


図1

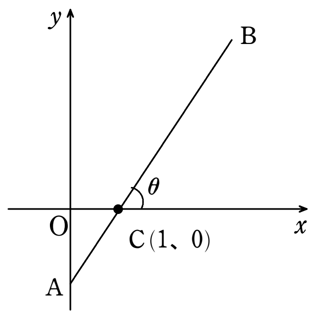


図2

問1　図2に示すように、点C(1、0)を通る長さ ℓ の線分ABがある。線分の一端Aが y 軸上の負の部分を動くとき、線分と x 軸のなす角を θ として、Bの y 座標 d を θ で表すと

$$d=\boxed{19}+\boxed{20}\,\ell$$

である。

$\boxed{19}$、$\boxed{20}$ に入る最も適切なものを、次の⓪～⑥のうちからそれぞれ1つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　$\sin\theta$　　①　$\cos\theta$　　②　$\tan\theta$

④　$(-\sin\theta)$　　⑤　$(-\cos\theta)$　　⑥　$(-\tan\theta)$

問2　$\ell=8$ のとき、d の最大値は

$$\boxed{21}\sqrt{\boxed{22}}$$

である。

問3　問1、2の結果を使うと図1のような道路で下方から右方向に運ぶことのできる棒の長さ ℓ の最大値は

$$\left(\boxed{23}+\sqrt[3]{\boxed{24}}\right)^{\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}}}\ [m]$$

である。

（解説）

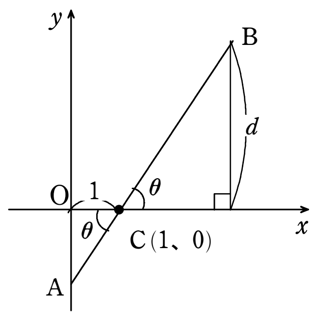
問1　右図より　$\left(\ell>1、0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{ とする。}\right)$

$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}-\mathrm{AC}$

$\quad=\ell-\dfrac{1}{\cos\theta}$

よって、$d=\mathrm{BC}\cdot\sin\theta$

$\qquad=-\tan\theta+\sin\theta\cdot\ell$　　答



問2　$d=f(\theta)$ とおくと、

$f'(\theta)=-\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\ell\cdot\cos\theta$

$\quad=\dfrac{\ell\cdot\cos^3\theta-1}{\cos^2\theta}$

問3を考慮して
ℓ のまま解いていく。

$\quad=\dfrac{\left(\ell^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\theta-1\right)\left(\ell^{\frac{2}{3}}\cdot\cos^2\theta+\ell^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\theta+1\right)}{\cos^2\theta}$　　より

$\cos\theta=\dfrac{1}{\ell^{\frac{1}{3}}}$ を満たす θ を α とすると　$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

増減表は以下のようになる。

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$		↗	最大	↘	

よって、$\theta=\alpha$ のとき、$f(\theta)$ は最大となる。

このとき、$\cos\alpha=\dfrac{1}{\ell^{\frac{1}{3}}}$ より、$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{\ell^{\frac{2}{3}}-1}}{\ell^{\frac{1}{3}}}$、$\tan\alpha=\sqrt{\ell^{\frac{2}{3}}-1}$ となるので

$f(\alpha)=-\tan\alpha+\ell\cdot\cos\alpha$

$\quad=-\sqrt{\ell^{\frac{2}{3}}-1}+\ell\cdot\dfrac{\sqrt{\ell^{\frac{2}{3}}-1}}{\ell^{\frac{1}{3}}}$

$\quad=\left(\ell^{\frac{2}{3}}-1\right)\sqrt{\ell^{\frac{2}{3}}-1}$

$\quad=\left(\ell^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}$

$\ell=8$ より、d の最大値は、$\left(8^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$　　答

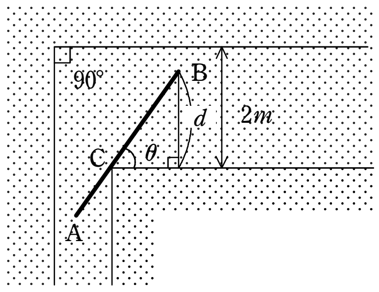
問3　図1、2より右図のように設定する。

$\ell\leqq1$ のとき、必ず曲がれるので、$\ell>1$ で考える。

このとき、右側に曲がれる条件は、

d の最大値$\leqq2$ より

問2から、$\theta=\alpha$ で d は最大となるので



$\left(\ell^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}\leqq2$

$\therefore\ \ell^{\frac{2}{3}}-1\leqq2^{\frac{2}{3}}$

$\therefore\ \ell^{\frac{2}{3}}\leqq2^{\frac{2}{3}}+1$

$\therefore\ \ell\leqq\left(2^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{3}{2}}=\left(1+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

よって、ℓ の最大値は、$\left(1+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ $[m]$ となる。　　答

4 次の文章を読み、下の問い（問1～4）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

図1のような正八角形ABCDEGHの頂点からkとなる3点を無作為に選び、これらを頂点とする三角形を作る、という試行を行う。

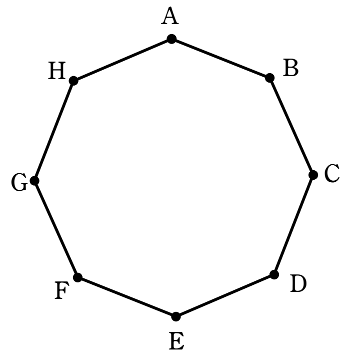


図1

問1　この試行でできる三角形が二等辺三角形である場合の数は $\boxed{27}\,\boxed{28}$ 通りで、すべての辺の長さが異なる三角形である場合の数は $\boxed{29}\,\boxed{30}$ 通りである。

問2　この試行でできる三角形が、△AHBと合同である確率は $\dfrac{\boxed{31}}{\boxed{32}}$ であり、△AHCと合同である確率は、$\dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}$ である。

問3　合同な三角形を同じ種類とみなすとき、この試行で $\boxed{35}$ 種類の三角形を作ることができる。

問4　2回続けてこの試行を行う。ここで、1回目と2回目の試行は独立に行われるものとする。

(1)　1回目にできる三角形と2回目にできる三角形が合同である確率は、$\dfrac{\boxed{36}\,\boxed{37}}{\boxed{38}\,\boxed{39}}$ である。

(2)　1回目にできた三角形が二等辺三角形だったとき、2回目にできる三角形が1回目の三角形と合同である確率は、$\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$ である。

解説

問1　∠Aを頂角とする二等辺三角形は3個作れるので（図2）
∠B～∠Hを頂角とする場合も同様に考えて
$3\times8=24$ 個
正三角形は1つも作れないので、
二等辺三角形は24通り
また、三角形は全部で ${}_8C_3=56$ 個作れるので
すべての辺の長さが異なる三角形は
$56-24-0=32$ 通り　　答

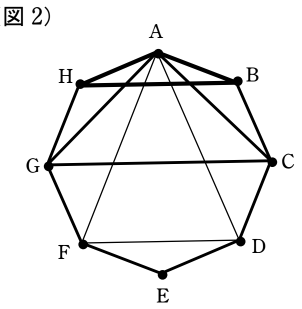


図2

問2　△ABHと合同な三角形は8個作れる。
よって、求める確率は、$\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$
△AHCに合同な三角形は∠Aを鈍角としたとき、2個作れる。（図3）
∠B～∠Hを鈍角とする場合も同様に考えて
$2\times8=16$ 個
よって、求める確率は、$\dfrac{16}{56}=\dfrac{2}{7}$　　答

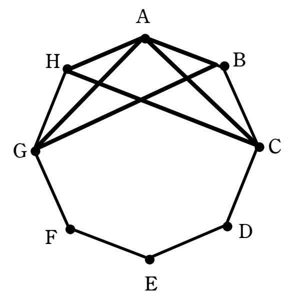


図3

問3　二等辺三角形は△ABH、△ACG、△ADFのいずれかと合同で、3辺が異なる三角形は△AHC△AHFのいずれかと合同である。
よって、作れる三角形は、5種類　　答

問4　(1)　1回の試行で△ABH、△ACG、△ADFのいずれかと合同な三角形が作られる確率は、それぞれ $\dfrac{1}{7}$

また、△AHC、△AHFのいずれかと合同な三角形が作られる確率は、それぞれ $\dfrac{2}{7}$

よって、1回目と2回目の三角形が合同となる確率は

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2\times3+\left(\frac{2}{7}\right)^2\times2=\frac{11}{49}$$　答

(2)　1回目に二等辺三角形が作られるという事象を A
2回目にできる三角形が1回目の三角形と合同となるという事象を B とすると
求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^2\times3}{\frac{1}{7}\times3}=\frac{1}{7}$$　答